测量与地球物理集刊

第　二　号

目　　录

莫洛琴斯基的扰动位积分方程解……许厚泽（ 1 ）

用球函数法解算重力测量的基本微分方程……骆鸣津（ 7 ）

利用強阻尼重力仪进行海洋重力测量的理论问题……李锡其（ 27 ）

*　　*　　*

关于地下铁道貫通误差的讨论……李　平（ 38 ）

*　　*　　*

地面立体摄影测量误差及建立摄影测量网的方法……张海根　余冠英（ 44 ）

在 CM-4 上利用无线电测高仪记录求航高的改进方法……唐炳燮（ 63 ）

利用无线电定位仪进行定位测量时关于基线长度测定方法的探讨……杨家骏（ 78 ）

*　　*　　*

对钟计数器……施正范（ 88 ）

*　　*　　*

微波测距发展现状……夏治中（102）

测量与地球物理集刊
第 二 号

莫洛琴斯基的扰动位积分方程解

許 厚 澤

莫洛琴斯基在 1945 年[1]及 1948 年[2]的论文中，从格林公式出发，卓越地建立了确定地球地形表面上扰动位的积分方程：

$$T=\frac{1}{2\pi}\int_s\frac{g-\gamma}{r}\sec\alpha\,dS+\frac{1}{2\pi}\int_s T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\sec\alpha-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\sec\alpha-2\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)\cos\alpha-\frac{1}{r}\Delta_2 H\cos\alpha\right]dS,\qquad(1)$$

式中 T 为扰动位，S 为第一级近似地球表面，r 为 S 面上流动点到待求点的距离，α 为 S 面的倾角，$g-\gamma$ 为重力异常，H 为正常高，∂v 表示曲面 $H=$ 常数的外法线单元长度，$\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)$ 及 $\Delta_2 H$ 为两个算子，定义为：

$$\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial_2}{\partial B}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial B}\right)+\frac{1}{\rho^2\cos^2 B}\frac{\partial_2}{\partial L}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial L}\right),$$

$$\Delta_2 H=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H}{\partial B^2}+\frac{1}{\rho^2\cos^2 B}\frac{\partial^2 H}{\partial L^2}-\frac{\mathrm{tg}\,B}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial B},$$

而 ρ 为向径，$\frac{\partial_2}{\partial B}=\frac{\partial}{\partial B}+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial B}$，$\frac{\partial_2}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial L}$.

此外，还阐明了所求方程的可解性和唯一性条件及其物理意义. 后来，考虑到这一方程求解的复杂性，莫洛琴斯基又利用一辅助函数——单层密度 φ，组成单层密度的积分方程，并进而解出扰动位：

$$\left.\begin{aligned}2\pi\varphi\cos\alpha&=\Delta g+\frac{3}{2\rho_0}\int_s\frac{\varphi}{r}dS+\frac{1}{2\rho_0}\int\frac{\rho^2-\rho_0^2}{r^3}\varphi dS,\\T&=\int_s\frac{\varphi}{r}dS.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

莫洛琴斯基还证明了，公式 (1) 和 (2) 是等价的. 后经耶勒麦夫和尤尔金娜等人对他的理论作了大量的试验，证明了这一理论的正确性，从而成为近代大地重力学上重要的发展.

用单层密度数值解莫洛琴斯基的积分方程方法，经过莫洛琴斯基 (1949, 1960)[3,4] 一系列发展和努力，已经较为完善. 在理论方面，B. B. 布洛瓦尔近年来又加以发展[5,6]. 但是直接解方程 (1) 的方法目前还很少有讨论. 本文试图用莫洛琴斯基的小参数方法[4,126页]求解 (1) 式.

首先，对 (1) 式进行如下的变化. 由文献 [4]91 页，

$$\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)=D\left(\frac{1}{r},H\right)+h_0\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial v}D(H,H)=D\left(\frac{1}{r},H\right)+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial v}\operatorname{tg}\alpha,$$

并令 $dS\cos\alpha=d\sigma_1$，代入方程(1)得：

$$T=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r}\sec^2\alpha\,d\sigma_1+\frac{1}{2\pi}\int T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\sec^2\alpha-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\sec^2\alpha-\right.$$

$$\left.-2D\left(\frac{1}{r},H\right)-2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{r}\Delta_2H\right]d\sigma_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,d\sigma_1+\frac{1}{2\pi}\int T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}+\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\operatorname{tg}^2\alpha-2D\left(\frac{1}{r},H\right)-\frac{1}{r}\Delta_2H\right]d\sigma_1. \qquad (3)$$

又由文献[4]的86页和127页知：

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right],$$

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_0^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right],$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}=\frac{\rho^2-\rho_0^2}{2\rho_0r^3}-\frac{1}{2\rho_0r}\doteq\frac{H-H_0}{r^3}-\frac{1}{2\rho_0r},$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}=-\frac{2}{\rho}\doteq-\frac{2}{\rho_0},$$

及文献[5]：

$$D\left(\frac{1}{r},H\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\rho\,\partial\psi}\frac{\partial H}{\rho\,\partial\psi}=-\frac{\rho_0\sin\psi}{r^3}\frac{\partial H}{\rho\,\partial\psi}.$$

在上面一些公式中，$\Delta H=H-H_0$，并且略去了 $\frac{H}{\rho}$ 级量，因为所有推导仅及扁率级误差的精度。

以同一精度，我们可以用地球平均半径 R 代替 ρ_0，并且 $d\sigma_1=\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^2d\sigma\cong d\sigma$，即代换成 $d\sigma_1$ 在半径为 R 的球上的投影，于是(3)式变为：

$$T=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right](1+\operatorname{tg}^2\alpha)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int T\left\{\frac{H-H_0}{r_0^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]+\right.$$

$$+\frac{3}{2Rr_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-$$

$$-\frac{H-H_0}{r_0^3}\operatorname{tg}^2\alpha\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]+$$

$$+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-$$

$$-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-$$

$$-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]\Big\}d\sigma. \tag{4}$$

然后，我们用文献[4, 126页]的方法，过渡到新边界 $\bar{S}$. 在任意点的向径与某参数 k 有关，即 $\bar{\rho}=R+kH$, $0\leqslant k\leqslant 1$. 我们把与这曲面相关的各元素用顶上加一横表示，有

$$\bar{H}=kH,\qquad \Delta_2\bar{H}=k\Delta_2 H,\qquad \Delta\bar{H}=k\Delta H,$$

$$\operatorname{tg}^2\bar{\alpha}=k^2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

并且当 $k\leqslant 1$ 时，存在收敛级数：

$$\bar{T}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n T_n. \tag{5}$$

显然，当 $k=1$ 时，即为我们所需的解 T. 把上面各关系式代入(4)式，并比较同幂次 k 前的各系数，有：

$$\left.\begin{aligned}
T_0&=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_0 d\sigma,\\
T_1&=\frac{1}{2\pi}\int T_0\left\{\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right\}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left\{\frac{3}{2Rr_0}\right\}d\sigma,\\
T_2&=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}\left[\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_0\left[-\frac{3(\Delta H)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_2 d\sigma,\\
T_3&=\frac{1}{2\pi}\int T_0\left[-\frac{3}{2}\frac{(\Delta H)^3}{r_0^5}+\frac{3R\sin\psi(\Delta H)^2}{r_0^5}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}+\frac{(\Delta H)^2}{2r_0^3}\Delta_2 H-\right.\\
&\quad\left.-\frac{H-H_0}{r_0^3}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left[-\frac{3(\Delta H)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_2\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_3 d\sigma,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

容易看出，以上积分方程的形式为：

$$2\pi T_n-\frac{3}{2R}\int\frac{T_n}{r_0}d\sigma=K_n, \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
K_0 &= \int \frac{g-\gamma}{r_0}\,d\sigma,\\
K_1 &= \int T_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma,\\
K_2 &= \int \frac{g-\gamma}{r_0}\left[\mathrm{tg}^2\alpha-\frac{1}{2}\,\frac{(H-H_0)^2}{r_0^2}\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_0\left[-\frac{3(H-H_0)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\,\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_1\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma,\\
K_3 &= \int T_0\left[-\frac{3}{2}\,\frac{(H-H_0)^3}{r_0^5}+\frac{3R\sin\psi(H-H_0)^2}{r_0^5}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{(H-H_0)^2}{2r_0^3}\,\Delta_2 H-\frac{H-H_0}{r_0^3}\,\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_1\left[-\frac{3(H-H_0)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\,\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_2\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma.
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

方程(7)的一般解为:

$$T_n=\frac{K_n}{2\pi}+\frac{3}{(4\pi R)^2}\int K_n[S(\psi)-1]\,d\sigma,\qquad(9)$$

最后得:

$$T=\sum_0^\infty T_n,$$

其中 $S(\psi)$ 为斯托克司函数. 显然,对于 T_0 有:

$$T_0=\frac{1}{4\pi R}\int(g-\gamma)[S(\psi)-1]\,d\sigma,\qquad(10)$$

这就是著名的斯托克司公式.

根据研究,在实际应用时,取至一级近似即够了,即

$$\left.\begin{aligned}
T &= T_0+T_1,\\
T_0 &= \frac{1}{4\pi R}\int\Delta g[S(\psi)-1]\,d\sigma,\\
T_1 &= \frac{K_1}{2\pi}+\frac{3}{(4\pi R)^2}\int K_1[S(\psi)-1]\,d\sigma,\\
K_1 &= \int T_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\cdot\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma.
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

公式(11)为工作公式. 可以看出, 为了求出 T, 必须进行三次面积分,且要用到地形的梯度,因此工作量较解(2)式繁重. 但可作为很好的校核,而且地面的倾角和曲率的影响基本上可以直接顾及.

在具体计算中，$\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}$ 为在流动点上，沿着被研点到流动点方向的地表面倾斜．$\Delta_2 H$ 值可先把流动点附近高程展为级数：

$$H = H_0 + A\Delta B + B\Delta L + \frac{C}{2}\Delta B^2 + \frac{D}{2}\Delta L^2 + E\Delta B\Delta L,$$

ΔB，ΔL 为经纬度差，然后按下式：

$$\begin{aligned}\Delta_2 H &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2 B}\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} - \frac{\operatorname{tg} B}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial B}\\ &= \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^2\cos B} - \frac{A\operatorname{tg} B}{R^2}\end{aligned} \tag{12}$$

计算．

最后，把扰动位 T 换算为高度异常．按布隆斯公式：

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}.$$

并把 $d\sigma$ 化成以单位球面元 $d\omega$ 为变元，$d\sigma = R^2 d\omega$，则有

$$\left.\begin{aligned}&\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \cdots,\\ &\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma}\int \Delta g[S(\psi) - 1]d\omega,\\ &\zeta_1 = \frac{R^2}{2\pi}K_1' + \frac{3R^2}{16\pi^2}\int K_1'[S(\psi) - 1]d\omega,\\ &K_1' = \int \zeta_0\left[\frac{H - H_0}{r_0^3} - \frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi} - \frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\omega,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

垂线偏差的计算公式也很容易由上式引出，例如，子午方向的垂线分偏差可写成：

$$\xi = -\frac{\partial\zeta(H, B, L)}{R\,\partial B} = -\frac{\partial\zeta(B, L)}{R\,\partial B} - \left(\frac{g - \gamma}{\gamma} + \frac{2T}{\gamma R}\right)\frac{\partial H}{R\,\partial B}. \tag{14}$$

同样，引进 $\bar{S}$ 面，并用小参数展开可得：

$$\left.\begin{aligned}&\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots\cdots,\\ &\xi_0 = -\frac{\partial\zeta_0}{R\,\partial B},\\ &\xi_1 = -\frac{\partial\zeta_1}{R\,\partial B} - \left(\frac{g - \gamma}{\gamma} + \frac{2\zeta_0}{R}\right)\frac{\partial H}{R\,\partial B},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

把(13)式取微分，并代入(15)式后，可得计算垂线偏差的实用公式(到一次近似止)如下：

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= -\frac{1}{4\pi\gamma}\int \Delta g\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A d\omega,\\ \xi_1 &= -\frac{R^2}{2\pi}\int \zeta_0\left[-\frac{3(H - H_0)}{r_0^4} + \frac{6R\sin\psi}{r_0^4}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi} + \right.\\ &\quad \left. + \frac{\Delta_2 H}{r_0^2}\right]\cos\frac{\psi}{2}\cos A d\omega - \frac{3R}{16\pi^2}\int K_1'\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A d\omega -\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$-\left(\frac{g-\gamma}{\gamma}+\frac{2\zeta_0}{R}\right)\frac{\partial H_0}{R\,\partial B},$$

$$K_1'=\int\zeta_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\omega,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

对于 η 可得同样公式，只需将其中的 $\cos A$ 换成 $\sin A$ 即可. 由以上可以看出，计算垂线偏差的工作量比高度异常更为繁重.

参 考 文 献

[1] Молоденский, М. С., Основные вопросы геодезической гравиметрии, Труды ЦНИИГАиК, вып. 42, 1945.

[2] Молоденский, М. С., Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности земли, *Известия АН СССР, Серия географическая и геофическая*, № 3, 1948.

[3] Молоденский, М. С., Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида, Труды ЦНИИГАиК, вып. 68, 1949.

[4] Молоденский, М. С., Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И., Метод изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

[5] Бровар, В. В., Решение некоторых внешних краевых задач для земной поверхности, *Известия высших учебных заведений, Геодезия и Аэрофотосъема*, 1963, № 1.

[6] Бровар, В. В., О решения краевой задачи Молоденского, *Известия высших учебных заведений, Геодезия и Аэрофотосъема*, 1963, № 4.

测量与地球物理集刊
第 二 号

用球函数法解算重力测量的基本微分方程*

駱 鳴 津

在莫洛金斯基理论以前的大地重力学中，是以大地水准面上的边界条件方程为基础来解算扰动位的．这就遇到了很复杂的调整和归算问题，目前还不能完满地解决．而莫洛金斯基避开了这些问题，提出了以地球表面为边界的边界条件方程，这时边界条件方程中的边界函数是能实际测出来的．这样就从根本上解决了持续达一百年之久的理论难题．

边界条件方程在大地重力学中通常称为重力测量的基本微分方程．莫洛金斯基的重力测量基本微分方程是莫洛金斯基理论的基础．解算这一方程可用不同方法，莫洛金斯基、布洛瓦尔、尤尔金娜等都曾提出了一些方法，他们大都采用单层位、双层位等形式来表示地球的扰动位，列出单层密度（或双层密度）为积分变量的积分方程．由此解出单层密度，再求出扰动位，而不是直接由重力测量的基本微分方程来求定扰动位．莫洛金斯基理论不但在理论证明上非常严谨，而且进行了大量的試驗．

本文試图从莫洛金斯基的重力测量微分方程出发，以球函数为工具，直接解出扰动位．由于重力测量基本微分方程的精度所限，公式仅导至扁率级[1)]．

一、求球面上的函数值

从边界条件方程出发来求定外空间（或表面）任一点的函数值，我们称之为解外部边界问题，只要此函数在外空间是调和与正则的，则其解就是唯一的和有界的．在我们的问题中是：在已知表面 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$（此处指的是地球第一次近似地形表面）上，给出了边界函数 $f(\vartheta, \lambda)$（此处指重力异常 $\Delta g = g - \gamma$），求定空间任一点的扰动位函数 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$．由于 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ 是空间的单值函数，并满足调和正则条件，因此是有解的．上述符号中，ϑ, λ 为空间各点的地心球面坐标，分别为极距和经差，ρ 为空间各点的向径，ρ_N 是 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面上各点的向径．因为 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面的形状已知，故 ρ_N 是 ϑ, λ 的已知函数，也可以写成 $\rho_N(\vartheta, \lambda)$．又设 ρ_0 为球的半径，ρ_k 为空间待定 $T(\rho_k, \vartheta, \lambda)$ 的点的向径．

---

* 本文系由方俊导师指导，并在许厚泽、李瑞浩、刘衡宇等同志的具体帮助下完成的，作者在此致以衷心的感谢．

1) 在地球形状理论中，基本微分方程的完整形式应为：

$$-\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}\frac{T}{\gamma}=\Delta g,$$

而

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}=-\gamma\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}\right)+2\omega=-\frac{2\gamma}{\rho}(1+\alpha^2\cos^2 B)+2\omega^2,$$

式中 M，N 为主曲率半径，ω 为地球自转角速度，ρ 为平均曲率半径．

实际上 (1) 式采用了 $\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}=-\frac{2\gamma}{\rho}$，而略去了 α^2 级的项，故公式 (1) 的精度仅达扁率级．

其次，由莫洛金斯基导出的扁率平方级公式 (III–3–39) 和(III–3–41)与扁率级公式(III–2–12)和(III–2–13)比较(参见文献[1])，可以看出，它们之间达扁率级．

重力测量的基本微分方程可写为:

$$\left[\alpha T(\rho, \vartheta, \lambda) + \beta \frac{\partial T(\rho, \vartheta, \lambda)}{\partial \rho}\right]_{\rho=\rho_N(\vartheta,\lambda)} = f(\vartheta, \lambda), \tag{1}$$

式中

$$\alpha = -\frac{2}{\rho_N}, \quad \beta = -1, \quad f(\vartheta, \lambda) = g - \gamma.$$

从球函数定理可知，空间调和正则函数 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ 可由球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 单值的确定，其关系如下:

$$T(\rho, \vartheta, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda), \qquad \rho_0 < \rho, \tag{2}$$

式中 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 为 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的第 i 阶球面函数. 根据球函数定理写成:

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda), \tag{3}$$

$$T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{2i+1}{4\pi} \int T(\rho_0, \vartheta', \lambda') P_i(\cos\psi) d\omega', \tag{4}$$

式中 ψ 是由待算点 (ϑ, λ)（在此点上待求定 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的值）到流动点 (ϑ', λ')（此点是积分单元面积所在之处）之间的角距[1].

(4) 式中的 $P_i(\cos\psi)$ 根据球函数的加法定理可写成:

$$P_i(\cos\psi) = P_i(\cos\vartheta)P_i(\cos\vartheta') + 2\sum_{k=1}^{i} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \cos k(\lambda' - \lambda) P_i^k(\vartheta) P_i^k(\vartheta'),$$

$d\omega'$ 为单位球（球的半径为 1）上单元面积,

$$d\omega' = \sin\vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \tag{5}$$

在(4)式积分方程中，ϑ', λ' 是积分变量，$P_i(\cos\psi)$ 是积分核，$T(\rho_0, \vartheta', \lambda')$ 是被积函数. 从式中看出，如欲求第 i 阶球面函数 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$，只需将球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 变量改为积分变量 ϑ', λ'，并代入积分方程 (4) 中作被积函数即可. 由于积分核 $P_i(\cos\psi)$ 是 ϑ, λ, ϑ', λ' 的函数，故积分后仍为 ϑ, λ 的函数，而与等式左端一致，这一性质在下面推导中还会遇到的.

我们再回到公式 (2). 可以看出，如果能求出第 i 阶球面函数 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 时，就能求出空间的扰动位 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$. 因此利用重力测量的基本微分方程 (1)，来求定 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 就成为问题的关键.

将 (2) 式代入 (1) 式中得:

$$\left[\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) + \beta \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)\right]_{\rho=\rho_N(\vartheta,\lambda)} = f(\vartheta, \lambda),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [\alpha\rho_N(\vartheta, \lambda) - \beta(i+1)] \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_N(\vartheta, \lambda)}\right)^{i+2} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda).$$

令 $Q_i = \alpha\rho_N(\vartheta, \lambda) - \beta(i+1)$（在大地重力学中 $Q_i = i - 1$），则上式可写成:

---

1) 由球面三角形得:

$$\cos\psi = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\lambda - \lambda').$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(\vartheta,\lambda)}\right)^{i+2} T_i(\rho_0,\vartheta,\lambda) = f(\vartheta,\lambda). \tag{6}$$

令

$$H(\vartheta,\lambda) = \rho_N(\vartheta,\lambda) - \rho_0,$$

则

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(\vartheta,\lambda)}\right)^{i+2} = 1 - (i+2)\frac{H(\vartheta,\lambda)}{\rho_0},$$

上式只取到 $\frac{H(\vartheta,\lambda)}{\rho_0}$ 级，而略去高阶各项，因为这些高阶项均在扁率平方级以上[1]. 将(2)式代入(6)式中，得:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_0} Q_i T_i(\rho_0,\vartheta,\lambda) - \frac{H(\vartheta,\lambda)}{\rho_0^2}\sum_{i=0}^{\infty} Q_i(i+2)T_i(\rho_0,\vartheta,\lambda) = f(\vartheta,\lambda). \tag{7}$$

(7)式两端均为 ϑ, λ 的函数，故可根据(4)式的定理展为同阶的球函数. 为了与(7)式中原有的阶号 i 区别起见，在此用 n 来表示新展开的球函数的阶号. 它仍是 0,1,2,3,$\cdots$, n, $\cdots$, 等正整数. 第 n 阶球面函数可写为:

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_0}Q_iT_i(\rho_0,\vartheta',\lambda') - \frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}Q_i(i+2)T_i(\rho_0,\vartheta',\lambda')\right]\times$$

$$\times P_n(\cos\psi)d\omega' = \frac{2n+1}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')P_n(\cos\psi)d\omega' = f_n(\vartheta,\lambda). \tag{8}$$

等式左端第一项，根据球函数正交性定理可写成:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\sum_{i=0}^{\infty}Q_iT_i(\rho_0,\vartheta',\lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega' = \frac{1}{\rho_0}Q_nT_n(\rho_0,\vartheta,\lambda).$$

因此(8)式可写成:

$$\frac{1}{\rho_0}Q_nT_n(\rho_0,\vartheta,\lambda) - \frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0^2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)Q_iT_i(\rho_0,\vartheta',\lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega',$$

移项后得:

$$Q_nT_n(\rho_0,\vartheta,\lambda) = \rho_0 f_n(\vartheta,\lambda) +$$

$$+\frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)Q_iT_i(\rho_0,\vartheta',\lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega'. \tag{9}$$

我们用逐渐趋近法来解算积分方程(9)，首先令:

$$Q_nT_n(\rho_0,\vartheta,\lambda) \approx \rho_0 f_n(\vartheta,\lambda).$$

如用 i 来表示阶号，实质不变，即

$$Q_iT_i(\rho_0,\vartheta,\lambda) \approx \rho_0 f_i(\vartheta,\lambda). \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式右端第二项得:

$$Q_nT_n(\rho_0,\vartheta,\lambda) = \rho_0 f_n(\vartheta,\lambda) +$$

$$+\frac{2n+1}{4\pi Q_n}\int\left[\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)\rho_0 f_i(\vartheta',\lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega',$$

两端同除 Q_n，则得:

1) 因为地球半径为6000公里，地形起伏最大处为10公里，则 $\frac{H}{\rho_0}$ 的数量级为扁率级，$\left(\frac{H}{\rho_0}\right)^2$ 为扁率平方级.

$$T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{2n+1}{4\pi Q_n} \int \left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)\rho_0 f_i)\vartheta', \lambda') \right] P_n(\cos\psi) d\omega'. \qquad (11)$$

由于公式只导至扁率级，故无需再作趋近，公式 (11) 即我们所需要的解. 如对(11)式两端求和，可得球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$，此值仅具有数学上的意义，相当于在保持外空间的扰动位函数不变时，将地面上的 $T(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 解析延展到球面上.

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} f(\vartheta, \lambda) \right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n. \qquad (12)$$

此即球面上函数 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式，其积分形式也很容易导出. 利用(4)式的原理，可将(11)式中的 $f_i(\vartheta', \lambda')$，$f_n(\vartheta, \lambda)$ 写成:

$$f_i(\vartheta', \lambda') = \frac{2i+1}{4\pi} \int f(\vartheta'', \lambda'') P_i(\cos\psi') d\omega'',$$

$$f_n(\vartheta, \lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega', \qquad (13)$$

式中

$$d\omega'' = \sin\vartheta'' d\vartheta'' d\lambda'',$$

ϑ'', λ'' 是积分变量，(ϑ'', λ'') 是 $d\omega''$ 所在的流动点. ψ' 是固定点 (ϑ', λ') [在此点上待定 $f_i(\vartheta', \lambda')$] 到流动点 (ϑ'', λ'') 之间的角距[1]. 将(13)式代入(11)式中，得:

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q_n} \frac{2n+1}{4\pi} \int \left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)\rho_0 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2i+1}{4\pi} \int f(\vartheta'', \lambda'') P_i(\cos\psi') d\omega'' \right] P_n(\cos\psi) d\omega',$$

上式中 i, n 与积分变量 ϑ, λ, ϑ', λ' 无关，故可移到积分号之内，即

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

---

1) $\cos\psi' = \cos\vartheta' \cos\vartheta'' + \sin\vartheta' \sin\vartheta'' \cos(\lambda' - \lambda'')$.

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$
$$\times\left[\int f(\vartheta'',\lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''\right]d\omega'.$$

将等式右端第二项拆为两项得：

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$
$$\times\int f(\vartheta'',\lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'.$$

考虑到公式的收敛性，可作如下的改造：

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$
$$\times\int[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'+$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$
$$\times\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'.$$

因

$$\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''=$$
$$=f(\vartheta',\lambda')\int\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''=0,$$

故

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P(\cos\psi)d\omega'+$$
$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times \int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')] \sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1) P_i(\cos\psi') d\omega'' d\omega'.$$

令

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) = S(\psi),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1) P_i(\cos\psi') = R(\psi'),$$

则

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') S(\psi) d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi} \int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} f(\vartheta', \lambda') S(\psi) d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2} \int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} S(\psi) \int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')] R(\psi') d\omega'' d\omega' \qquad (12a)$$

此即本节应求定的公式的积分形式[1].

二、求外空間一点的函数值

设外空间一点的坐标为 $(\rho_k, \vartheta, \lambda)$, ρ_k 为该点的向径, ϑ, λ, 为该点的球面坐标, 根据 (2) 式此点的函数值应为:

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda), \qquad \rho_k > \rho_0, \qquad (14)$$

$T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 在上节 (11) 式中已经导出, 代入 (14) 式中, 并按上节类似的办法推导, 可得 $T(\rho_k, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式的公式及积分形式的公式. 其级数形式如下:

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}} \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}} \frac{2\rho_0}{Q_n} \left[f(\vartheta, \lambda) \frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}} \frac{\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} i f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n. \qquad (15)$$

因

$$\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} f(\vartheta, \lambda) \right]_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega',$$

$$\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int \left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(\vartheta', \lambda') \right] P_n(\cos\psi) d\omega' =$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi} \int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \left[\frac{1}{4\pi} \int f(\vartheta'', \lambda'') \sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1) P_i(\cos\psi') d\omega'' \right] \times$$

$$\times P_n(\cos\psi) d\omega' = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} (2n+1) P_n(\cos\psi) \times$$

$$\times \int f(\vartheta'', \lambda'') R(\psi') d\omega'' d\omega'.$$

将上列关系代入(15)式中,立即可得积分形式的公式:

---

1) 用(12) 式表示球面上 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的积分形式的公式;用 (12a) 式表示 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式的公式.

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0^2}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{2\rho_0^2}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0^2}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times\int[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \tag{16}$$

令

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)=S(\rho_k,\psi),$$

$$\rho_0^2d\omega'=d\sigma',\qquad\rho_0^2d\omega''=d\sigma'',$$

则

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\rho_k,\psi)d\sigma'+\frac{2}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}S(\rho_k,\psi)d\sigma'+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}S(\rho_k,\psi)\int[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \tag{15a}$$

由公式(15)和(15a)已能求出空间一点的扰动位函数[1)]，但有其不便之处，即由于积分核 $S(\rho_k,\psi)$ 是 ρ_k 的函数，当待算点 $(\rho_k,\vartheta,\lambda)$ 的高程改变(此处即向径 ρ_k 的改变)时，则 $S(\rho_k,\psi)$ 就会随之改变，如用模板进行数值积分时，就需制各种不同高程的模板，使计算较为繁杂. 同时，我们也有条件对公式(15)和(15a)作进一步的改化，因为无须将完整的 $\left(\frac{\rho_0}{\rho_k}\right)^{n+1}$ 值置于仅达扁率级的公式中，而可展成级数的形式.

令

$$H_0=\rho_k-\rho_0,$$

即有

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_k}\right)^{n+1}=1-(n+1)\frac{H_0}{\rho_0}\qquad\text{(仅取至扁率级)},$$

代入(16)中，略去扁率平方级以上的各项，得：

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\psi)d\omega'+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}S(\psi)d\omega'-$$

$$-\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H_0}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta',\lambda')d\omega'. \tag{17}$$

将上式右端第三项拆为两项，使

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{Q_n}P_n(\cos\psi)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n-1+2)(2n+1)}{n-1}P_n(\cos\psi)=$$

1) 用(15a)式来表示空间扰动位函数含积分核 $S(\rho_k,\psi)$ 时的积分形式的公式，用(15)式来表示相应的级数形式的公式.

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi) + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\psi)^{1)},$$

则

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)d\omega' -$$

$$- H_0 f(\vartheta, \lambda) - \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta', \lambda')d\omega' =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - H_0 f(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\int[f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (18a)$$

(18a)式相应的级数形式可写成:

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0}{n-1}f_n(\vartheta, \lambda) - H_0 f(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\rho_0}{n-1}\left[f(\vartheta, \lambda)\frac{H(\vartheta, \lambda) - H_0}{\rho_0}\right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0}{n-1}\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta, \lambda)\right]_n. \quad (18a')$$

将(18a)式右端最后一项作如下的改造:

$$\frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta', \lambda')d\omega' =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda) + H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta', \lambda')d\omega' =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta', \lambda')d\omega' +$$

$$+ H(\vartheta, \lambda)\frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}(n-1+1)P_n(\cos\psi)d\omega' =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta', \lambda') + H(\vartheta, \lambda)f(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega', \quad (19)$$

则

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + [H(\vartheta, \lambda) - H_0]f(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)\int[f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (18b)$$

---

1) 注意 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\psi)\neq 0$

由于扰动位函数是连续的，故在 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面上的函数值 $T(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 可直接令 $H_0 = H(\vartheta, \lambda)$，由(18a)式写成：

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - H(\vartheta, \lambda)f(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (18c)$$

由(18b)式写成：

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{2H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)\int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (18d)$$

当(19)式中用 H_0 来代换 $H(\vartheta, \lambda)$ 时，也可导出相应的公式，这时，

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{2H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)\int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (18e)$$

这些公式均有其相应的级数形式，这里就不再列出了.

由(17)式出发，可导出其它形式的公式：

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)d\omega' -$$

$$- H_0 f(\vartheta, \lambda) - \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty} if_i(\vartheta', \lambda')d\omega' -$$

$$- \frac{\rho_0}{4\pi}\int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty} i\left[f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty} i\left[f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\right]_i d\omega' =$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)d\omega' - H_0 f(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega' -$$

$$- \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta'', \lambda'')R(\psi')d\omega''d\omega' -$$

$$- \frac{\rho_0}{4\pi}\int S(\psi)\frac{1}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'')}{\rho_0}f(\vartheta'', \lambda'')R(\psi')d\omega''d\omega',$$

故

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{3H(\vartheta', \lambda') - 2H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$
$$+ [H(\vartheta, \lambda) - H_0]f(\vartheta, \lambda) -$$
$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\vartheta'', \lambda'')\frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}R(\psi')d\omega''d\omega'. \qquad (20a)$$

当在 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面上时，$H_0 = H(\vartheta, \lambda)$，于是

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{3H(\vartheta', \lambda') - 2H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega' -$$
$$- \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi)\int f(\vartheta'', \lambda'')\frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}R(\psi')d\omega''d\omega'. \qquad (20b)$$

此外，我们还可从（18）式这一类公式出发根据球函数正交性定理，导出另一类公式，如可将（18a）式写成：

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - H_0f(\vartheta, \lambda) + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$
$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\sum_{i=0}^{\infty} i\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\right]_i d\omega', \qquad (21)$$

式中 $\sum_{i=0}^{\infty} i\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\right]_i$ 可写为[1]：

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\right]_i = \sum_{i=0}^{\infty} i\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\vartheta, \lambda, \vartheta', \lambda')\right]_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{2i+1}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'')}{\rho_0}S(\vartheta, \lambda, \vartheta'', \lambda'')P_i(\cos\psi')d\omega'' =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'')}{\rho_0}S(\vartheta, \lambda, \vartheta'', \lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)iP_i(\cos\psi)d\omega''.$$

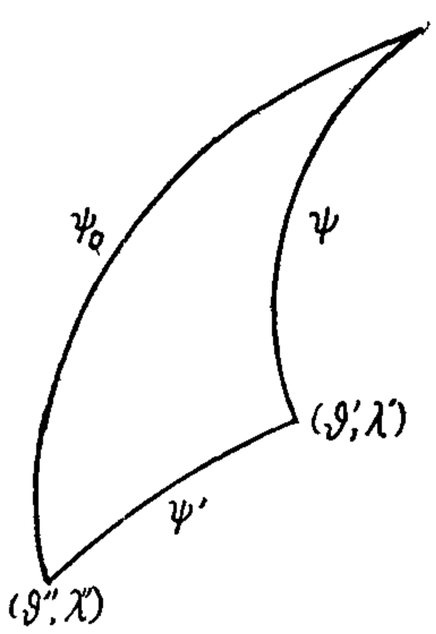


图 1

式中令 ψ_0 为 (ϑ, λ) 点到 (ϑ'', λ'') 点间角距时（如图 1），

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}S(\psi)\right]_i = \frac{1}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'')}{\rho_0}S(\psi_0)R(\psi')d\omega'',$$

则

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - H_0f(\vartheta, \lambda) +$$
$$+ \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega' +$$
$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta', \lambda')\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'')}{\rho_0}S(\psi_0)R(\psi')d\omega''d\omega'.$$

顾及到收敛性，上式应写为：

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - H_0f(\vartheta, \lambda) +$$

1) 因 ψ 是 $\vartheta, \lambda, \vartheta', \lambda'$ 的函数.

$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')-H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[H(\vartheta'',\lambda'')S(\psi_0)-H(\vartheta',\lambda')S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (22a)$$

同理可由(18b)式得:

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\psi)d\omega'+[H(\vartheta,\lambda)-H_0]f(\vartheta,\lambda)+$$

$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')-H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega'+\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}S(\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\left[\frac{H(\vartheta'',\lambda'')S(\psi_0)-H(\vartheta',\lambda')S(\psi)}{\rho_0}\right]R(\psi')d\omega''d\omega'-$$

$$-\frac{\rho_0}{16\pi^2}H(\vartheta,\lambda)\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[S(\psi_0)-S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (22b)$$

由(18c)式得:

$$T(\rho_N,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\psi)d\omega'-H(\vartheta,\lambda)f(\vartheta,\lambda)+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[H(\vartheta'',\lambda'')S(\psi_0)-H(\vartheta',\lambda')S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (22c)$$

由(18d)式得:

$$T(\rho_N,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\psi)d\omega''+\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{2H(\vartheta',\lambda')-H(\vartheta,\lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[H(\vartheta'',\lambda'')S(\psi_0)-H(\vartheta',\lambda')S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'-$$

$$-\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}H(\vartheta,\lambda)[S(\psi_0)-S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (22d)$$

由(18e)式得:

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')S(\psi)d\omega'+\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\frac{2H(\vartheta',\lambda')-H_0}{\rho_0}S(\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[H(\vartheta'',\lambda'')S(\psi_0)-H(\vartheta',\lambda')S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'-$$

$$-\frac{\rho_0}{16\pi^2}H_0\int f(\vartheta',\lambda')\int\frac{1}{\rho_0}[S(\psi_0)-S(\psi)]R(\psi')d\omega''d\omega'. \quad (22e)$$

这样在此就导出了(15), (18), (20), (22)式这四种类型的公式，以求定外空间一点的扰动位函数。公式(15)与莫洛金斯基1949年公式有些相似，它们的积分核均为$S(\rho_k,\psi)$；公式(20)与莫洛金斯基1960年公式基本一致(下面还要具体讨论)；公式(18)的最后一项$\frac{1}{4\pi}\int[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]R(\psi')d\omega''=\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta',\lambda')$，只是$f(\vartheta,\lambda)$的函数，可在具有重力资料和异常变化较为平缓的地区预先计算，同时也可利用现有重力异常资料的球函数形式。而公式(22)与此相反，可根据地形图对这一部分进行计算。这两类公式的优点是重力异常和地形在进行两重面积分时可以分开考虑。

同时，由这些公式也解决了直接将重力异常归算到球面上去的问题．这时由(18)式令

$$F(\vartheta', \lambda') = f(\vartheta', \lambda')\left[1 + \frac{2H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\right] + \frac{H(\vartheta', \lambda') - H_0}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty} if_i(\vartheta', \lambda'). \quad (23)$$

由(20)式令

$$F(\vartheta', \lambda') = f(\vartheta', \lambda')\left[1 + \frac{3H(\vartheta', \lambda') - 2H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}\right] -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{r_0^3} f(\vartheta'', \lambda'')d\sigma''^{1)}. \quad (24)$$

这时空间的扰动位函数的形式可写为：

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int F(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega'. \quad (25)$$

(23),(24)式是在保证外空间扰动位函数不变情况下进行归算的，因此就不产生调整问题．

三、求积分核

在上列积分公式中含有积分核：

$$S(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \quad (26)$$

$$S(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \quad (27)$$

$$R(\psi') = \sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi'). \quad (28)$$

(26)—(28)式为级数形式，在进行积分时需要的是它们的有限形式，因此下面我们将分别求定：

1. 求 $S(\rho, \psi)$ 及 $S(\psi)$

因

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi), \quad (29)$$

则

$$\int \frac{1}{r}\rho d\rho + C = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-1} \frac{\rho_0^n}{\rho^{n-1}} P_n(\cos\psi)$$

进而得：

$$2\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\int \frac{1}{r}\rho d\rho + \frac{C}{\rho}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n-1} \frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos\psi),$$

---

1) (24)式中应用了 $R(\psi') = -\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}$，这在下节将要推导．

$$\left[\frac{1}{\rho^2}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho+\frac{C}{\rho^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi).$$

将以上两式相减得:

$$2\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\rho}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho+\frac{C}{\rho}\right]-\frac{1}{\rho^2}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho-\frac{C}{\rho^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi)=S(\rho,\psi).$$

则

$$S(\rho,\psi)=2\left\{-\frac{1}{\rho^2}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho+\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\rho\right\}-$$

$$-\frac{1}{\rho^2}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho-\frac{3C}{\rho^2}=\frac{2}{r}-3\frac{1}{\rho^2}\int\frac{1}{r}\,\rho d\rho-\frac{3C}{\rho^2}.$$

为了确定常数 C，可令 $\rho\to\infty$，其结果早已有人导出[2]，这里不再推演，而直接写出其结果:

$$S(\rho,\psi)=\frac{2}{r}+\frac{1}{\rho}-\frac{5\rho_0\cos\psi}{\rho^2}-\frac{3r}{\rho^2}-\frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho^2}\ln\frac{r+\rho-\rho_0\cos\psi}{2\rho}.\qquad(30)$$

有了 $S(\rho,\psi)$ 就能很快的写出 $S(\psi)$ 的表示式来，因

$$S(\psi)=\left[d_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}\frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}}P_n(\cos\psi)\right]_{\rho=\rho_0}=\rho_0S(\rho_0,\psi),$$

故

$$S(\psi)=\rho_0\left[\frac{1}{\rho}+\frac{2}{r}-\frac{5\rho_0\cos\psi}{\rho^2}-\frac{3r}{\rho^2}-\frac{3\rho_0\cos\psi}{\rho^2}\ln\frac{r+\rho-\rho_0\cos\psi}{2\rho}\right]_{\rho=\rho_0}=$$

$$=\frac{2\rho_0}{r_0}+\frac{1}{\rho_0}-\frac{3r_0}{\rho_0}-3\cos\psi\ln\frac{r_0+\rho_0-\rho_0\cos\psi}{\rho_0}+5\cos\psi=$$

$$=\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos\psi-3\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right),\qquad(31)$$

式中 r_0 是在半径为 ρ_0 的球面上固定点到流动点间的距离——弦长.

2. 求 $R(\psi')$

$$R(\psi')=\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi').$$

因

$$\frac{1}{r}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\rho_0^i}{\rho^{i+1}}P_i(\cos\psi'),$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}-\frac{\rho_0^i}{\rho^{i+2}}(i+1)P_i(\cos\psi'),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)\frac{\rho_0^i}{\rho^{i+3}}P_i(\cos\psi'),$$

故

$$\sum_{i=0}^{\infty}(2i^2+6i+4)\frac{\rho_0^i}{\rho^i}P_i(\cos\psi')=2\rho^3\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-5i-5)\frac{\rho_0^i}{\rho^i}P_i(\cos\psi')=5\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\rho_0^i}{\rho^i}P_i(\cos\psi')=\rho\frac{1}{r}.$$

三式相加得:

$$\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)\frac{\rho_0^i}{\rho^i}P_i(\cos\psi')=\rho\frac{1}{r}+5\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)+2\rho^3\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

从而

$$R(\psi')=\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')=\left[\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)\frac{\rho_0^i}{\rho^i}P_i(\cos\psi')\right]_{\rho=\rho_0}=$$

$$=\left[\rho\frac{1}{r}+5\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)+2\rho^3\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{\rho=\rho_0}.$$

又因

$$5\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{5\rho^2}{r^3}(\rho-\rho_0\cos\psi')$$

和

$$2\rho^3\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-2\rho^3\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{r^3}(\rho-\rho_0\cos\psi')\right]=$$

$$=-2\rho^3\left[-\frac{3(2-2\rho_0\cos\psi)(\rho-\rho_0\cos\psi)}{2r^5}+\frac{1}{r^3}\right],$$

故

$$R(\psi')=\left[\frac{\rho}{r}-\frac{5}{r^3}(\rho^3-\rho^2\rho_0\cos\psi)+6\rho^3(\rho-\rho_0\cos\psi)\frac{1}{r^5}-\frac{2\rho^3}{r^3}\right]_{\rho=\rho_0}=$$

$$=\frac{\rho_0}{r_0}-\frac{5\rho_0^3}{r_0^3}(1-\cos\psi')+\frac{6\rho_0^5}{r_0^5}(1-\cos\psi')^2-\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}.$$

而

$$\rho_0^2(1-\cos\psi)=2\rho_0^2\sin^2\frac{\psi}{2}=\frac{1}{2}r_0^2,$$

故

$$R(\psi')=\frac{\rho_0}{r_0}-\frac{5\rho_0r_0^2}{2r_0^3}+\frac{3\rho_0r_0^4}{2r_0^5}-\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}=-\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}. \tag{32}$$

四、驗 証

验证公式一般用三种办法：1. 将求得的公式与已知正确的公式比较，2. 用模作试验，3. 用实际资料来验算. 最后一种办法由于资料和时间关系，尚需留待以后有条件时进行.

1. 比 较 法

前已说明,苏联 M. C. 莫洛金斯基所导出的公式是经过多次验证无误的. 他所导出的公式有二,现在我们与他在 1960 年所导出的公式进行比较.

我们将莫洛金斯基 1960 年公式写至 T_1 级,并用本文的符号表示如下:

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{S(\psi)}{\rho_0}d\sigma' +$$
$$+ \frac{1}{8\pi^2}\int \frac{S(\psi)}{\rho_0}\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{r_0^3} f(\vartheta'', \lambda'')d\sigma''d\sigma' +$$
$$+ \frac{3\rho_0^3}{(4\pi)^3}\int S(\psi)\int \frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{r_0^3} \times$$
$$\times \int f(\vartheta''', \lambda''')S(\psi'')d\omega'''d\omega''d\omega',$$

式中 ψ'' 是点 (ϑ'', λ'') 到流动点 $(\vartheta''', \lambda''')$ 间的角距，

$$d\omega''' = \sin\vartheta'''d\vartheta'''d\lambda'''.$$

上式最后的三重面积分项可化为单重面积分项[1]，并注意 $R(\psi') = -\frac{2\rho_0^3}{r_0^3}$ 的关系，则可将上式写为：

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi) \times$$
$$\times \int f(\vartheta'', \lambda'')\frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} R(\psi')d\omega''d\omega' +$$
$$+ \frac{3\rho_0}{8\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda') - H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega'. \qquad (33)$$

而本文所导出之公式(20)为：

$$T(\rho_N, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' - \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int S(\psi) \times$$
$$\times \int f(\vartheta'', \lambda'')\frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} R(\psi')d\omega''d\omega' +$$
$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{3H(\vartheta', \lambda') - 2H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} S(\psi)d\omega'. \qquad (34)$$

将(34)与(33)式进行比较，很容易看出，两式仅右端最后一项不同．但此两项本身之值甚小，故苏联学者及我国科学工作者在验证莫洛金斯基公式时均予略去．

---

1) 注意到

$$\frac{1}{r_0^3} = \left(-\frac{1}{2\rho_0^3}\right)R(\psi') = \left(-\frac{1}{2\rho_0^3}\right)\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi'),$$

则

$$\frac{3\rho_0^3}{(4\pi)^3}\int S(\psi)\int\frac{H(\vartheta'', \lambda'') - H(\vartheta', \lambda')}{r_0^3}\int f(\vartheta''', \lambda''')S(\psi'')d\omega'''d\omega''d\omega' =$$
$$= -\frac{3}{128\pi^3}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\int H(\vartheta'', \lambda'')\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi')\times$$
$$\times\int f(\vartheta''', \lambda''')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2j+1}{j-1}P_j(\cos\psi'')d\omega'''d\omega''d\omega' +$$
$$+ \frac{3}{128\pi^3}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)H(\vartheta', \lambda')\int\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi')\times$$
$$\times\int f(\vartheta''', \lambda''')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2j+1}{j-1}P_j(\cos\psi'')d\omega'''d\omega''d\omega' =$$

2. 模 上 验 证

上面已将(20)式与莫洛金斯基公式进行了比较，证明基本上是相符的，唯(33)，(34)右端最后一项仍不相同. 为了判明它们的数量级，并且对公式(18)进行验证，在此设计了一个非常简单的模.

设以扁椭圆体表面作为 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面，其方程为:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{35}$$

和以

$$T(\rho, \vartheta, \lambda)=\frac{b}{\rho}A_0P_0(\cos\psi)+\frac{b^3}{\rho^3}A_2P_2(\cos\psi)+\frac{b^4}{\rho^4}A_3P_3(\cos\psi) \tag{36}$$

作为空间的扰动位函数. 设 $H(\vartheta, \lambda)=\rho_N(\vartheta, \lambda)-b$, $\rho_N(\vartheta, \lambda)$ 为椭圆面上点的向径，由(35)式得:

$$H(\vartheta, \lambda)=\rho_N-b=b\frac{a^2-b^2}{2a^2}\sin^2\vartheta. \tag{37}$$

(接上页脚注)

$$=-\frac{3}{32\pi^2}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\int H(\vartheta'', \lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta'', \lambda'')d\omega''d\omega'+$$

$$+\frac{3}{32\pi^2}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)H(\vartheta', \lambda)'\int\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta'', \lambda'')d\omega''d\omega'=$$

$$=-\frac{3}{8\pi}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{i=0}^{\infty}(i-1+1)\left[H(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')\right]_i d\omega'+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)H(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')d\omega'=$$

$$=-\frac{3}{8\pi}\int\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\psi)\left[H(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')\right]_n d\omega'-$$

$$-\frac{3}{8\pi}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)H(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')d\omega'+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)H(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')d\omega'=$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[H(\vartheta, \lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta, \lambda)\right]_n+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int H(\vartheta', \lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{j-1}f_j(\vartheta', \lambda')d\omega'=$$

$$=-\frac{3}{2}H(\vartheta, \lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j-1}f_j(\vartheta, \lambda)+\frac{3}{8\pi}\int H(\vartheta', \lambda')f(\vartheta', \lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega'=$$

$$=-\frac{3}{8\pi}H(\vartheta, \lambda)f(\vartheta', \lambda')\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2j+1}{j-1}P_j(\vartheta', \lambda')d\omega'+$$

$$+\frac{3}{8\pi}\int H(\vartheta', \lambda')f(\vartheta', \lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi)d\omega'=$$

$$=\frac{3\rho_0}{8\pi}\int f(\vartheta', \lambda')\frac{H(\vartheta', \lambda')-H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}S(\psi)d\omega',$$

式中 j 是球函数的阶号.

同时，由(6)及(36)，(35)式可知：

$$f(\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\frac{1}{b}\left(\frac{b}{\rho_N}\right)^{n+2}T_n(b,\vartheta,\lambda)=$$

$$=-A_0P_0\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right)+$$

$$+A_2P_2(\cos\psi)\left(1-2\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right)+$$

$$+2A_3P_3(\cos\psi)\left(1-\frac{5}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right). \tag{38}$$

并且由(36)式还知道：

$$T(a,\vartheta,\lambda)=\frac{b}{a}A_0P_0+\frac{b^3}{a^3}A_2P_2(\cos\psi)+\frac{b^4}{a^4}A_3P_4(\cos\psi)=$$

$$=A_0P_0\left(1-\frac{a-b}{b}\right)+A_2P_2(\cos\psi)\left(1-3\frac{a-b}{b}\right)+$$

$$+A_3P_3(\cos\psi)\left(1-4\frac{a-b}{b}\right). \tag{39}$$

以上公式均只取至扁率级.

验证的办法是将(37)，(38)式表示的 $H(\vartheta,\lambda)$ 和 $f(\vartheta,\lambda)$ 代入(18)式中，求 $T(a,\vartheta,\lambda)$ 的值，然后与(39)式的真值进行比较.

公式(18a′)式为：

$$T(\rho_k,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0}{n-1}f_n(\vartheta,\lambda)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0}{n-1}\left[f(\vartheta,\lambda)\frac{2H(\vartheta,\lambda)-H_0}{\rho_0}\right]_n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0}{n-1}\left[\frac{H(\vartheta,\lambda)-H_0}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}if_i(\vartheta,\lambda)\right]_n.$$

将(37)，(38)式代入得：

$$T(a,\vartheta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}[A_0P_0+A_2P_2(\cos\psi)+2A_3P_3(\cos\psi)]_n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{a^2-b^2}{a^2}\{\sin^2\vartheta[A_0P_0-2A_2P_2(\cos\psi)-5A_3P_3(\cos\psi)]\}_n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left[\left\{[-A_0P_0+A_2P_2(\cos\psi)+2A_3P_3(\cos\psi)]+\right.\right.$$

$$\left.+[A_0P_0-2A_2P_2(\cos\psi)-5A_3P_3(\cos\psi)]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right\}\left\{\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\vartheta-\frac{a-b}{b}\right\}\Bigg]_n+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{a^2-b^2}{2a^2}\sin^2\vartheta-\frac{a-b}{b}\right)(0+2A_2P_2(\cos\psi))\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{2(a^2-b^2)}{a^2}\sin^2\vartheta\right)+\right.$$

$$+ 6A_3P_3(\cos\psi)\left(1 - \frac{5}{2}\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}\sin^2\vartheta\right)\Big]_n.$$

仅取至扁率级精度.

$$T(a, \vartheta, \lambda) = [A_0P_0 + A_2P_2(\cos\psi) + A_3P_3(\cos\psi)]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\vartheta(A_0P_0 - 2A_2P_2(\cos\psi) - 5A_3P_3(\cos\psi))\right]_n -$$

$$- \left[\frac{a-b}{b}(A_0P_0 + A_2P_2(\cos\psi) + A_3P_3(\cos\psi))\right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\vartheta(-A_0P_0 + A_2P_2(\cos\psi) + 2A_2P_3(\cos\psi))\right]_n -$$

$$- \left[\frac{a-b}{b}(0 + A_2P_2(\cos\psi) + 3A_3P_3(\cos\psi))\right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\vartheta(0 + A_2P_2(\cos\psi) + 3A_3P_3(\cos\psi))\right]_n =$$

$$= A_0P_0\left(1 - \frac{a-b}{b}\right) + A_2P_2(\cos\psi)\left(1 - 3\frac{a-b}{b}\right) +$$

$$+ A_3P_3(\cos\psi)\left(1 - 4\frac{a-b}{b}\right). \tag{40}$$

(40)式即我们所要的结果,与真值(39)式相符. 如果在(34)式中除去最后一项,则其结果应为:

$$T(a, \vartheta, \lambda) = A_0P_0(\cos\psi) + A_2P_2(\cos\psi)\left(1 - 2\frac{a-b}{b}\right) +$$

$$+ A_3P_3(\cos\psi)\left(1 - 3\frac{a-b}{b}\right).$$

此式与(39)式相差达扁率级,由此证明了公式(20)和(18a′)的级数形式公式的正确性.

自然这样证明还不够全面,譬如还可在一些拟定的地形模型上进行数值积分,以求出它们在数值上的符合程度.

另外,我们还验证了:

$$\sum_{i=0}^{\infty} if(\vartheta', \lambda') = -\frac{\rho_0^3}{2\pi}\int\frac{[f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]}{r_0^3}d\omega'' \tag{41}$$

关系的正确性.

设

$$f(\vartheta', \lambda') = A_0P_0 + A_1P_1(\cos\psi') + A_2P_2(\cos\psi'), \tag{42}$$

则当 $\vartheta = 0$ 时,将(42)式代入(41)式的左端得:

$$\sum if_i(\vartheta', \lambda') = A_1 + 2A_2. \tag{43}$$

当 $\vartheta = 0$, 将(42)式代入(41)式的右端得:

$$-\frac{\rho_0^3}{2\pi}\int\frac{f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')}{r_0^3}d\omega'' =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{8}}\int\frac{[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]d\omega''}{[1-\cos\vartheta'\cos\vartheta''-\sin\vartheta'\sin\vartheta''\cos(\lambda'-\lambda'')]^{3/2}}=$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{8}}\int\left\{A_0+A_1\cos\vartheta''+A_2\left(\frac{3}{2}\cos\vartheta''-\frac{1}{2}\right)-[A_0+A_1+A_2]\right\}\times$$

$$\times\{[1-\cos\vartheta'']^{-3/2}\}\sin\vartheta''d\vartheta''d\lambda''=$$

$$= -\frac{A_1}{\sqrt{8}}\frac{2\sqrt{1-\cos\vartheta''}}{-1}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{3}{2}A_2\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{2(2+\cos\vartheta'')}{3}\sqrt{1-\cos\vartheta''}-$$

$$-\frac{3}{2}A_2\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{2\sqrt{1-\cos\vartheta''}}{-1}\Bigg|_0^{\pi}=A_1+2A_2. \tag{44}$$

将(44)与(43)式比较，证明了(41)式的正确性，也就证明了(18)式的积分形式公式的正确性.

五、内　　插

由于 $f(\vartheta,\lambda)$ 是 ϑ,λ 和高差的函数，如果直接按平面位置来内插，就会增加误差，山区尤甚. 因此应考虑用一已知函数来如实的反映 $f(\vartheta,\lambda)$ 随高差变化的情况. 作为间接内插工具，在一般情况下用布格改正 $kH(\vartheta,\lambda)$ 来内插，这是最为简单的情况:

$$\Delta g=\Delta g_0+kH,\qquad \Delta g_0=\Delta g-kH, \tag{45}$$

式中 $\Delta g=f(\vartheta,\lambda)$，为地面重力异常. 但由于 Δg 拆成了两项，代入前述各公式中，就会使得工作量几乎增加一倍. 下面考虑用一已知球函数来作间接内插工具.

设

$$T=T_0+T_1,\qquad T_0=T-T_1, \tag{46}$$

T_1 是一已知的有限球函数，其形式为:

$$T_1(\rho,\vartheta,\lambda)=-K_0\rho\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)+K_2\rho_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3P_2(\cos\psi)+\frac{1}{3}K_4\rho_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^5P_4(\cos\psi). \tag{47}$$

它满足于 (1) 式，设其边界函数为 δg，则

$$\delta g=\left[-\frac{\partial T_1}{\partial\rho}-\frac{2T_1}{\rho}\right]_{\rho=\rho_N}. \tag{48}$$

将(47)式代入(48)式中得:

$$\delta g(\rho_N,\vartheta',\lambda')=K_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^2+K_2\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^4P_2(\cos\psi)+K_4\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^6P_4(\cos\psi), \tag{49}$$

或

$$\delta g(\rho_N,\vartheta',\lambda')=K_0+K_2P_2(\cos\psi)+K_4P_4(\cos\psi)-$$

$$-2K_0\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}-4K_2\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}P_2(\cos\psi)-6K_4\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}P_4(\cos\psi). \tag{50}$$

(46)式中 T_0 是 T 中除去 T_1 后剩下的扰动位，其边界函数为 Δg_0，它可由下式求得，

$$\Delta g_0=\Delta g-\delta g=\Delta g-K_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^2-K_2\left(\frac{\rho_0}{\rho_N}\right)^4P_4(\cos\psi)-K_4\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)P_4(\cos\psi). \tag{51}$$

由(51)式求出 Δg_0 代入前述各公式，求出 T_0 的值，而 $T_1(\rho,\vartheta,\lambda)$ 的值可直接由(47)式求出. 这样就省去了许多工作量.

现在举一最简单的例子：

设

$$\delta g = K_0 - 2K_0 \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0},$$

则

$$\Delta g = [\Delta g_0 + K_0] - 2K_0 \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0},$$

$$\Delta g_0 = (\Delta g - K_0) + \frac{2K_0}{\rho_0} H(\vartheta', \lambda') = -K_0 + \left[\Delta g + \frac{2K_0}{\rho_0} H(\vartheta', \lambda')\right],$$

此即相当于布格内插公式中加上一个常数 $-K_0$，将 Δg_0 代入前述各公式中积分，求出 T_0. 由于 Δg_0 值的变化与布格变化异常一样，都比较平缓，在某些情况下可将前述各公式作进一步简化(如不作加精项——扁率一级的项——的计算).

至于 T_1，就不必将 δg 代入前述各公式中进行计算了，而可由下式直接求出，

$$T_1 = -K_0\rho + K_0 H(\vartheta, \lambda),$$

因此是非常简单的.

现在还留下一个问题，即如何判定 T_1 的各项系数较为合理. 当然，我们可以任意假定，但这样一来就不能使 Δg_0 变得平缓，而达不到内插的目的. 在此我们是用最小二乘法的方法求定. 从公式(51)出发，有

$$\Delta g_1 = \Delta g_0 - K_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(1)}\right)^2 - K_2\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(1)}\right)^4 P_4(\cos\psi) - K_4\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(1)}\right)^6 P_4(\cos\psi),$$

$$\Delta g_2 = \Delta g_0 - K_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(2)}\right)^2 - K_2\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(2)}\right)^4 P_4(\cos\psi) - K_4\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(2)}\right)^6 P_4(\cos\psi),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Delta g_n = \Delta g_0 - K_0\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(n)}\right)^2 - K_2\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(n)}\right)^4 P_4(\cos\psi) - K_4\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(n)}\right)^6 P_4(\cos\psi),$$

式中 Δg_0 视为待定常数，Δg_1，Δg_2，Δg_3，$\cdots$，Δg_n 为各点之重力异常，$\rho_N(1)$，$\rho_N(2)$，$\rho_N(3)$，$\cdots$，$\rho_N(n)$，$\cdots$ 为各点的向径，$\rho_N(n) = \rho_0 + H(n)$. 只要在这一地区重力点点数比系数的个数多一个，这些系数就能求出. 其中尤以所举例的情况最为简单.

参 考 文 献

[1] Молоденский, М. С., Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И., Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

[2] 米哈依洛夫，A. A.，重力测量与地球形状教程(中译本)，1956 年，第 165—172 页.

测量与地球物理集刊
第 二 号

利用强阻尼重力仪进行海洋重力测量的理論問題

李 錫 其

一、扰动加速度对重力仪讀数的影响

在航行着的船上进行测量时，为了消除船只倾斜的影响，需将重力仪安置在万向支架上，使重力仪保持在水平位置. 图 1 是这种装置的平面图. 重力仪固定在装置的內环上，绕 a_1 轴相对于外环摆动，而外环则支承在与船只固连的支架上，绕 a_2 轴相对于船只摆动. 內、外环轴的交点 O 是系统的支点，重力仪可绕此点作任意方向摆动. 设系统的重心 E 在支点 O 的下方，其间距离为 L，重力仪摆动时，重心 E 在以 O 点为中心、L 为半径的球面上运动，所以这种装置相当于力学上的球面摆. 如果球面摆系由本身重量保持摆轴在铅直方向，这时我们称为常平架. 如果在內环中安放有高速旋转着的陀螺，而由陀螺力矩保持摆轴在铅直方向，则称为陀螺仪球面摆，或简称陀螺仪摆.

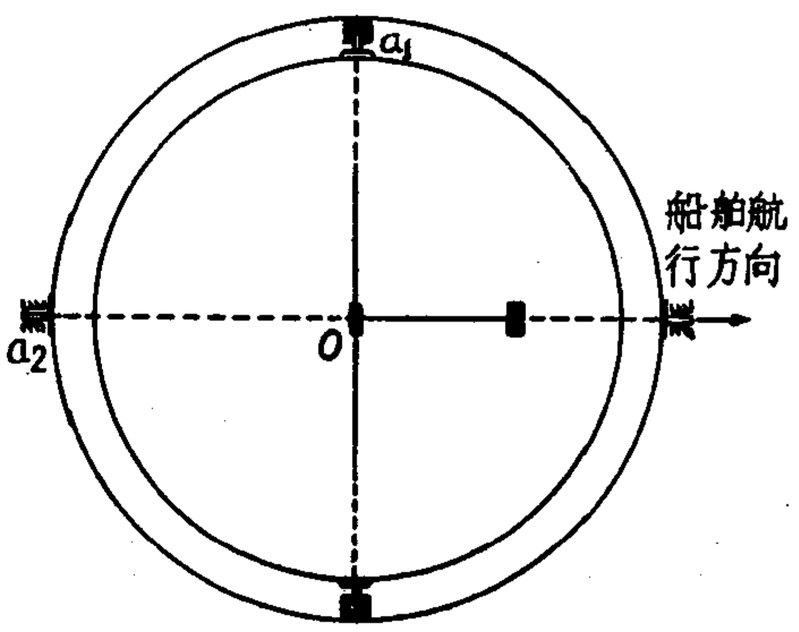


图 1

为便于公式推导和减弱与球面摆振动有关的惯性力影响，我们按下述方法安置重力仪和球面摆.

1. 利用重力仪上的水准器使重力仪测量轴与球面摆轴相平行;

2. 使水平扭丝和球面摆內环轴相重合，弹性摆位于通过外环轴的垂直平面 (图 1);

3. 使球面摆外环轴平行于船的纵轴(船的航行方向)，內环轴平行于船的横轴 (图 1).

现在根据与船舶航迹相联系的坐标 XYZ 来研究球面摆的运动 (图 2). 取支点 O 为坐标原点，X 和 Y 轴位于水平面上，X 轴沿航迹的法向，Y 轴沿航迹的切向，Z 轴垂直向上. 在球面摆的赤道平面上，即通过支点 O 垂直于球面摆轴的平面，放置两根互相垂直的轴 U 和 V (图 3)，并使 V 轴位于 YZ 面上，W 轴则沿球面摆轴向上. 坐标三面体 UVW 在任一时刻的位置，都可以根据 φ 和 θ 角来确定. 设在起始位置上三面体 UVW 和 XYZ 相重合，那么我们借助两次旋转: 绕 OX 轴旋转 φ 角，然后绕 OV 轴旋转 θ 角，即能得到 UVW 的新位置. φ 和 θ 角的符号这样确定，从转轴的正向看去，球面摆反时针方向转动时，θ 角为正，φ 角为负. U, V, W

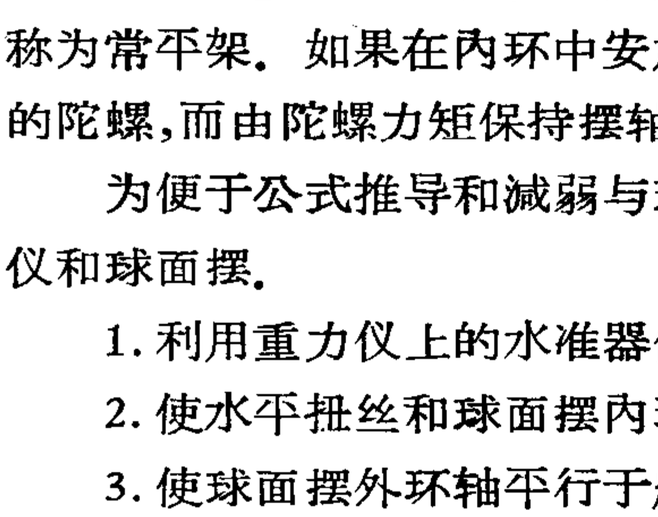


图 2

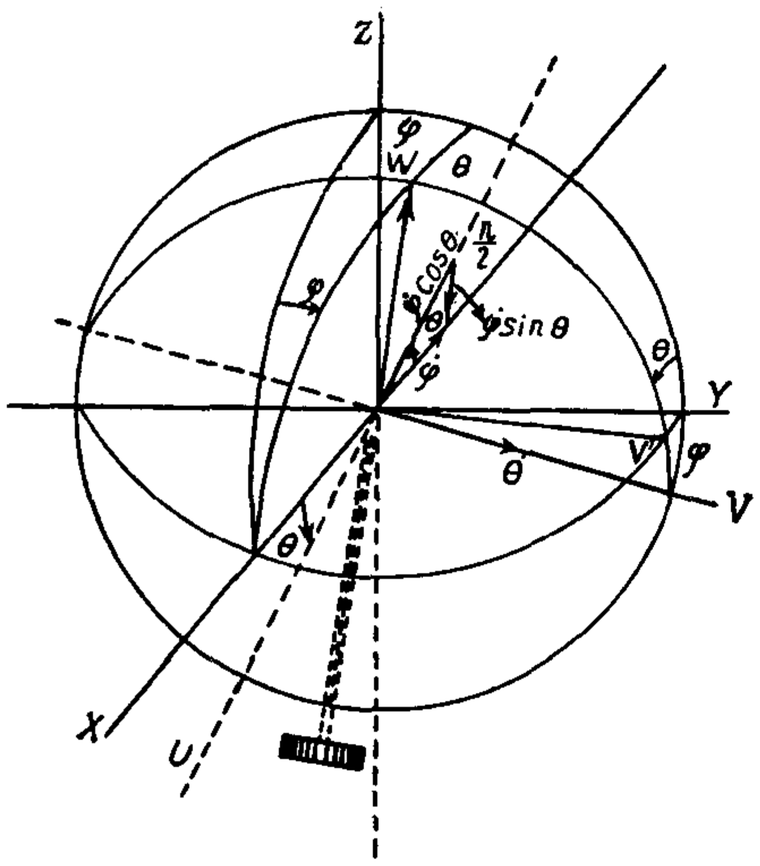


图 3

轴和 X, Y, Z 轴夹角的余弦列于表 1.

表 1

	X	Y	Z
U	$\cos\theta$	$-\sin\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
V	0	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
W	$\sin\theta$	$\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$

球面摆位置确定以后，我们就可以着手讨论各加速度对重力仪读数的影响.

船的运动有直线或曲线、等速或加速的前进运动，有波浪引起的水平和垂直振动，以及绕三根互相垂直的轴转动等.在观测时，我们可以使船基本上作直线等速航行，因此只有波浪引起的船只运动，能够产生作用在重力仪上的惯性加速度，它们是周期性的水平加速度和垂直加速度.

设 G 为重力加速度和扰动加速度在重力仪测量轴上的投影，令其向下为正，则得:

$$G = g\cos\theta\cos\varphi - \ddot{W} = g\cos\theta\cos\varphi - \ddot{Z}\sec\theta\sec\varphi - \ddot{U}\,\mathrm{tg}\theta - \ddot{V}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

式中 g 为重力加速度，$\ddot{Z}$ 为垂直加速度，$\ddot{U}$, $\ddot{V}$ 为水平加速度. 当沒有扰动影响时，测量轴上只有重力加速度 g，因此，相应的改正值为:

$$\delta g_1 = g - G = g(1 - \cos\theta\cos\varphi) + \ddot{Z}\sec\theta\sec\varphi + \ddot{U}\,\mathrm{tg}\,\theta + \ddot{V}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (1)$$

设 H 为重力加速度和扰动加速度在 V 轴上的投影，$H = g\sin\varphi + \ddot{V}$，$m$ 为弹性摆的质量，l 为弹性摆重心到旋转轴的距离，ε 为弹性摆与 V 轴的夹角. 由图 4 看到，加速度 H 对弹性摆的作用力矩为 $-mlH\sin\varepsilon$，而重力矩为 $mlg\cos\varepsilon$，如以 δg_2 表示相应的改正，则得:

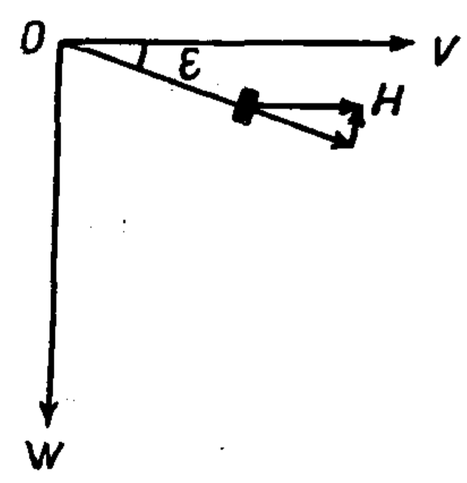


图 4

$$\frac{\delta g_2}{g} = \frac{mHl\sin\varepsilon}{mgl\cos\varepsilon},$$

$$\delta g_2 = H\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = g\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon + \ddot{V}\,\mathrm{tg}\,\varepsilon. \qquad (2)$$

因为重力仪弹性摆在 VW 平面，所以各加速度在 U 轴上的投影对重力仪读数沒有影响.

因为弹性摆在水平扭丝上的悬掛点与球面摆支点 O 重合，弹性摆接近 UV 平面，并且摆长 l 通常不大，所以由球面摆振动产生的惯性力可以忽略.

把(1)和(2)式中的三角函数展成级数，保留 θ, φ 和 ε 的四阶微量，然后相加，我们得到:

$$\delta g = \frac{1}{2}g(\theta^2+\varphi^2) - \frac{1}{24}g(\theta^4+6\theta^2\varphi^2+\varphi^4) + \ddot{U}\left(\theta+\frac{1}{3}\theta^3\right) +$$
$$+ \ddot{V}\left(\varphi+\frac{1}{3}\varphi^3+\frac{1}{2}\theta^2\varphi\right) + \ddot{Z} + \frac{1}{2}\ddot{Z}(\theta^2+\varphi^2) + \ddot{V}\left(\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^3\right)$$
$$+ g\left(\varphi\varepsilon+\frac{1}{3}\varphi\varepsilon^3-\frac{1}{6}\varphi^3\varepsilon\right). \qquad (3)$$

这是利用水平扭丝重力仪进行海洋重力测量的一般改正公式．下面我们将按不同的条件，来估算各项影响，并讨论消除它们的方法．

二、重力仪阻尼强度和滞后影响

垂直加速度 $\ddot{Z}$ 沿铅垂线方向，当向上时，减小重力观测值，而向下时则增大重力观测值．要在观测结果中引入这一影响的改正是比较困难的，通常是取足够长时间的观测平均值予以消除．但由于垂直加速度远大于重力仪的测量范围，没有阻尼或阻尼很小的重力仪不能进行读数，所以必须在弹性摆上附加强阻尼．阻尼愈大，愈能减小重力仪所受到的垂直加速度的振幅，从而为消除其影响所需的观测时间也愈短．

1. 在垂直加速度的作用下，重力仪弹性摆的运动方程[1]为：

$$\ddot{\varepsilon} + 2\lambda\dot{\varepsilon} + n^2\varepsilon = \frac{g_r}{l} - \ddot{Z}/l, \tag{4}$$

式中 λ 为阻尼系数，n 为弹性摆自振频率，l 为弹性摆长，g_r 为重力仪读数．在波浪运动的情况下，可以认为扰动加速度是时间的正弦函数，因而有

$$\ddot{Z} = \ddot{Z}_0 \sin \omega_z t,$$

式中 $\ddot{Z}_0$ 为垂直加速度的幅度，ω_z 为加速度的频率，t 为时间．

解出方程得：

$$\varepsilon = fg_r - fP\ddot{Z}_0 \sin(\omega_z t - \psi) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon, \tag{5}$$

换算为重力仪读数：

$$g_r = \frac{1}{f}\varepsilon + P\ddot{Z}_0 \sin(\omega_z t - \psi), \tag{6}$$

式中 $P = \dfrac{n^2}{\sqrt{(n^2 - \omega_z^2)^2 + 4\lambda^2\omega_z^2}} \approx \dfrac{n^2}{2\lambda\omega_z}$ 为重力仪动力系数，f 为重力仪角灵敏度，$f = \dfrac{1}{ln^2}$，ψ 为弹性摆振动和垂直加速度的相位差，$\operatorname{tg}\psi = \dfrac{2\lambda\omega_z}{n^2 - \omega_z^2}$，$\varepsilon_0$ 为弹性摆静平衡位置与 V 轴的夹角，$\Delta\varepsilon$ 为弹性摆受垂直加速度作用而相对于静平衡位置振动的角度．

根据(6)式，我们即可估算出为消除垂直加速度所必需的阻尼系数和观测时间，对(6)式取观测时间平均值，则得：

$$[g_r] = \frac{1}{f}[\varepsilon] + \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P\ddot{Z}_0 \sin(\omega_z t - \psi)\,dt,$$

式中方括号 [　] 表示取观测时间的平均值，右边第二项是垂直加速度在平均值中互相抵消的剩余误差．如果要求这一误差小于 0.5 毫伽，并设 $\ddot{Z}_0 \leqslant 100$ 伽，$\omega_z \geqslant 0.5$，$t_2 - t_1 =$ 600 秒，$n = 10$，则动力系数应满足 $P \leqslant \dfrac{1}{1375} \approx \dfrac{1}{1500}$，阻尼系数应有 $\lambda \geqslant 1.5 \cdot 10^5$ 秒$^{-1}$．因 P 除和重力仪结构的参数有关外，还和加速度频率有关．为便于以后的研究，我们引入一个只和重力仪参数有关的系数 μ，称为滞后系数，$\mu = \dfrac{1}{P\omega_z} = \dfrac{2\lambda}{n^2}$．在上述条件下，$\mu$ 应大于 3000 秒．

2. 如果在进行观测的航程上重力加速度保持不变，阻尼对重力观测值没有影响．但实际上这是不可能的，因为无论重力正常场或异常场都存在水平梯度．重力场的这种变

化是短时间的，带有強阻尼的弹性摆对它的反应有滞后现象，因而歪曲了测量地区的眞正重力场. 滞后系数愈大，则滞后误差也愈大. 下面我们讨论两种重力场情况.

(1) 重力场水平梯度的线性变化.

设 $g_r = g_{r_0} + bt$，其中 g_r 为任一观测时刻的重力仪读数，g_{r_0} 为观测开始时的重力仪读数，b 为与持续观测区间重力场水平梯度有关的系数.

在重力变化的作用下，弹性摆运动方程为:

$$\ddot{\varepsilon} + 2\lambda\dot{\varepsilon} + n^2\varepsilon = \frac{1}{l}(g_{r_0} + bt).$$

解出方程，并取持续观测期间的平均值，则得:

$$[g_r] = g_{r_0} - \mu b + \frac{1}{2}b(t_2 - t_1).$$

其中 $g_{r_0} + \frac{1}{2}b(t_2 - t_1)$ 是重力仪在船舶经过地区持续观测应有的平均读数，$-\mu b$ 是滞后误差. 假设在一段 20 公里的路程中重力变化为 30 毫伽，船舶航行速度为 20 公里/小时，由此得 $b = \frac{1}{120}$，如果取 $\mu = 3000$ 秒，则滞后误差约为 25 毫伽.

(2) 水平梯度的二次曲线变化

设 $g_r = g_{r_0} + ct^2$，解算方程 $\ddot{\varepsilon} + 2\lambda\dot{\varepsilon} + n^2\varepsilon = \frac{1}{l}(g_{r_0} + ct^2)$，并取观测平均值，我们得到:

$$[g_r] = g_{r_0} + 2\mu^2 c - 2\frac{c}{n^2} - \mu c(t_2 - t_1) + \frac{1}{3}c(t_2 - t_1)^2.$$

按照上面给出的重力变化和航速数据，有 $c = 2.8 \cdot 10^{-6}$，如取十分钟的观测平均值，则得:

$$\text{滞后误差} = 2\mu^2 c - 2\frac{c}{n^2} - \mu c(t_2 - t_1) \approx 45 \text{ 毫伽}.$$

从以上的计算看到，滞后误差是不能忽略的，它和重力场的变化特点有关. 因我们事先不知道重力场的特点，所以难以在观测结果中引入相应的改正.

为了消除这种误差，可以在重力仪中采用光电读数方法，把弹性摆感受的加速度变化转换为光电流变化，利用高灵敏电流计记录. 这时我们可以适当減小弹性摆上的阻尼，另外在电流计线圈上附加第二次阻尼，或者用滤波器把垂直加速度引起的交流分量滤去. 下面我们讨论在电流计线圈上附加阻尼的方法.

根据力学上的动量矩定理，我们可以写出弹性摆和电流计的运动方程:

$$\ddot{\varepsilon} + 2\lambda_1\dot{\varepsilon}_1 + n_1^2\varepsilon = \frac{1}{l}(g_r - \ddot{Z}),$$

$$\ddot{\beta} + 2\lambda_2\dot{\beta} + n_2^2\beta = N\varepsilon,$$

式中 λ_1, λ_2 为弹性摆和电流计线圈上的阻尼系数，n_1, n_2 为弹性摆自振频率和电流计线圈自振频率，N 为系数，它与光电元件的特性及电流计参数等有关，β 为电流计线圈的偏转角. 根据本节前面的讨论，弹性摆及电流计线圈的滞后系数分别为 $\mu_1 = \frac{2\lambda_1}{n_1^2}$, $\mu_2 = \frac{2\lambda_2}{n_2^2}$.

当弹性摆处于静平衡位置时，由上列方程组的第二式得 $\beta_0 = \frac{N}{n_2^2}\varepsilon_0$，所以电流计的放大率为 $\frac{N}{n_2^2}$，如以 f_1 表示弹性摆的角灵敏度，则电流计的角灵敏度为 $f_2 = \frac{N}{n_2^2}f_1$.

由上列方程组的第一式，即(4)式求得 ε，代入该方程组的第二式，然后解出 β，并换算为重力仪读数，则得：

$$g_r = \frac{1}{f_2}\beta + \frac{\ddot{Z}_0}{\mu_1\mu_2\omega_z}\sin(\omega_z t - \psi_1 - \psi_2).$$

这时重力仪的动力系数为 $P = \frac{1}{\mu_1\mu_2\omega_z}$，滞后系数为 $\mu = \mu_1\mu_2$. 根据前面的讨论，如果 μ_1 和 μ_2 满足不等式 $\mu_1\mu_2 \geqslant 3000$ 秒，则 100 伽以下的垂直加速度对观测平均值的影响小于 0.5 毫伽. 设 $\mu_1 = 100$，$\mu_2 = 30$，我们来估算这种阻尼方法的滞后误差.

(1) 重力场水平梯度的线性变化

解微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\varepsilon} + 2\lambda_1\dot{\varepsilon} + n_1^2\varepsilon &= \frac{1}{l}(g_{r_0} + bt),\\ \ddot{\beta} + 2\lambda_2\dot{\beta} + n_2^2\beta &= N\varepsilon.\end{aligned}\right\}$$

我们得到：

$$g_r = g_{r_0} - (\mu_1 + \mu_2)b + bt,$$

滞后误差 $= -(\mu_1 + \mu_2)b \approx -1$ 毫伽.

(2) 水平梯度的二次曲线变化

解出类似的微分方程组，则得：

$$g_r = g_{r_0} + 2c(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2) - 2c\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) - 2c(\mu_1 + \mu_2)t + ct^2.$$

通常 n_1^2 和 n_2^2 都远大于 c，所以上式第三项很小，如取十分钟的观测平均值，滞后误差小于 0.5 毫伽.

从上面的计算中，我们看到一个有趣的现象. 如采用所研究的阻尼方法，则在重力仪读数中，对周期性垂直加速度的滞后来说，是 μ_1 和 μ_2 的乘积在发生作用；而对重力变化的影响来说，则是它们的代数和，滞后误差大部分都已消除. 因此，可以认为，采用两次或多次阻尼是有好处的.

三、重力仪在常平架上观测

重力仪在常平架上的运动，可以看作是刚体绕固定点的运动，固定点就是球面摆的支点 O. 我们上面选定的坐标轴 U，V 和 W 是系统在 O 点处的惯性主轴，所以刚体对这三根轴的离心转动惯量等于零. 为便于研究，我们进一步假设刚体的质量分布近似于绕 W 轴旋转而成的旋转体，刚体对 U 和 V 轴的转动惯量相等.

在上述情况下，刚体运动的欧拉动力学方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dK_u}{dt}+(B-A)\Omega_v\Omega_w&=\bar{M}_u,\\ \frac{dK_v}{dt}+(A-B)\Omega_w\Omega_u&=\bar{M}_v,\\ \frac{dK_w}{dt}&=\bar{M}_w,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中 K_u, K_v 和 K_w 为刚体对 O 点的主动量矩在 U, V 和 W 轴上的投影, Ω_u, Ω_v, Ω_w 为坐标三面体 UVW 运动的角速度在同一轴系上的投影, A 为刚体对 U 和 V 轴的转动惯量, B 为刚体对 W 轴的转动惯量, $\bar{M}_u$, $\bar{M}_v$, $\bar{M}_w$ 为所有外力对 O 点的主矩在坐标轴上的投影.

由图 3 看到,角速度 Ω 的各个分量为:

$$\Omega_u=-\dot{\varphi}\cos\theta,\ \Omega_v=\dot{\theta},\ \Omega_w=-\dot{\varphi}\sin\theta.\tag{8}$$

动量矩在坐标轴上的投影等于各坐标轴上的角动量:

$$K_u=-A\dot{\varphi}\cos\theta,\ K_v=A\dot{\theta},\ K_w=-B\dot{\varphi}\sin\theta.\tag{9}$$

设 M 为系统的总质量,外力对坐标轴之矩为:

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}_u&=MgL\sin\varphi+M\ddot{V}L-M\ddot{Z}L\sin\varphi+R\dot{\varphi},\\ \bar{M}_v&=-MgL\sin\theta\cos\varphi-M\ddot{U}L+M\ddot{Z}L\sin\theta\cos\varphi-R\dot{\theta},\\ \bar{M}_w&=0,\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中 $R\dot{\varphi}$, $R\dot{\theta}$ 为阻尼力矩,我们认为它们和球面摆运动的角速度成正比, R 为比例系数. 把(9)式对时间的导数,连同(8)和(10)式代入方程(7),并将三角函数展成级数,略去 θ, φ 及其导数三次方以上各项,则得:

$$\left.\begin{aligned}A\ddot{\varphi}+R\dot{\varphi}+MgL\varphi-M\ddot{Z}L\varphi+M\ddot{V}L&=0,\\ A\ddot{\theta}+R\dot{\theta}+MgL\theta-M\ddot{Z}L\theta+M\ddot{U}L&=0,\\ \frac{dK_w}{dt}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

方程(11)第三式的积分为 $K_w=$ 常数. 把方程(11)的第一式和第二式略加变换得:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\varphi}+2F\dot{\varphi}+\omega_0^2\varphi-\omega_0^2\frac{\ddot{Z}}{g}\varphi+\omega_0^2\frac{\ddot{V}}{g}&=0,\\ \ddot{\theta}+2F\dot{\theta}+\omega_0^2\theta-\omega_0^2\frac{\ddot{Z}}{g}\theta+\omega_0^2\frac{\ddot{U}}{g}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式中 $F=\dfrac{R}{2A}$ 为阻尼系数, $\omega_0^2=\dfrac{MgL}{A}$, ω_0 为常平架自振频率.

设

$$\ddot{U}=\ddot{U}_0\sin\omega_u t,\ \ddot{V}=\ddot{V}_0\sin\omega_v t,\ \ddot{Z}=\ddot{Z}_0\sin\omega_z t,\tag{13}$$

式中 $\ddot{U}_0$, $\ddot{V}_0$ 和 $\ddot{Z}_0$ 为加速度的幅度, ω_u, ω_v 和 ω_z 为加速度的频率. 我们用渐近方法求方程(12)的解,把(13)式代入(12)式,先略去包含 $\ddot{Z}$ 的各项,用待定系数法求得 θ 和 φ 的第一次近似解. 然后代回原方程,去掉 $\omega_0^2\dfrac{\ddot{U}}{g}$ 和 $\omega_0^2\dfrac{\ddot{V}}{g}$ 项,积分后与第一次近似解相加,即得第二次近似解. 最后结果可以写为:

$$\theta=-\frac{\ddot{U}}{g}+\Delta\theta,\ \varphi=-\frac{\ddot{V}}{g}+\Delta\varphi,\tag{14}$$

式中

$$\Delta\theta = -\frac{\ddot{U}_0}{g}\{D_u^2\omega_0^2(\omega_0^2-\omega_u^2)-1\}\sin\omega_u t + \frac{\ddot{U}_0}{g}2D_u^2\omega_0^2\omega_u F\cos\omega_u t +$$

$$+\text{第二次积分所得各项(从略)},$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\ddot{V}_0}{g}\{D_v^2\omega_0^2(\omega_0^2-\omega_v^2)-1\}\sin\omega_v t + \frac{\ddot{V}_0}{g}2D_v^2\omega_0^2\omega_v F\cos\omega_v t +$$

$$+\text{第二次积分所得各项(从略)},$$

$$D_u^2 = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega_u^2)^2+4F^2\omega_u^2},\quad D_v^2 = \frac{1}{(\omega_0^2-\omega_v^2)^2+4F^2\omega_v^2}.$$

实际上第二次积分所得各项很小，我们下面估算各项扰动影响时可以把它略去．设 $\frac{\omega_u}{\omega_0}$, $\frac{\omega_v}{\omega_0}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{F}{\omega_0}\leqslant\frac{1}{2}$，当加速度不超过 50 伽时，$\Delta\theta$, $\Delta\varphi\leqslant 50'$，如加速度不超过 20 伽，则它们都小于 $20'$.

把(5)和(14)式代入(3)式，化简后按幂次排列，我们得到重力仪在常平架上观测的改正公式：

$$\delta g = \ddot{Z} - \frac{1}{2g}(\ddot{U}^2+\ddot{V}^2) + \frac{1}{2}g(\Delta\theta^2+\Delta\varphi^2)+g\varepsilon_0\Delta\varphi+g\Delta\varphi\Delta\varepsilon+\frac{\ddot{Z}}{2g^2}(\ddot{U}^2+\ddot{V}^2)+$$

$$+\frac{1}{2}\ddot{Z}(\Delta\theta^2+\Delta\varphi^2)-\frac{\ddot{Z}}{g}(\ddot{U}\Delta\theta+\ddot{V}\Delta\varphi)-\frac{3}{8g^3}(\ddot{U}^2+\ddot{V}^2)^2+\frac{1}{2}(\ddot{U}\Delta\theta^3+$$

$$+\ddot{V}\Delta\varphi^3+\ddot{V}\varepsilon_0\Delta\varphi^2+\ddot{V}\Delta\varphi^2\Delta\varepsilon+2\ddot{V}\Delta\theta^2\Delta\varphi+\ddot{U}\Delta\theta\Delta\varphi^2)-\frac{1}{24}g(\Delta\theta^4+$$

$$+6\Delta\theta^2\Delta\varphi^2+\Delta\varphi^4-8\varepsilon_0^3\Delta\varphi-24\varepsilon_0\Delta\varphi\Delta\varepsilon^2-24\varepsilon_0^2\Delta\varphi\Delta\varepsilon-8\Delta\varphi\Delta\varepsilon^3+4\varepsilon_0\Delta\varphi^3+$$

$$+4\Delta\varphi^3\Delta\varepsilon)-\frac{1}{4g}(5\ddot{U}^2\Delta\theta^2+5\ddot{V}^2\Delta\varphi^2+\ddot{U}^2\Delta\varphi^2+3\ddot{V}^2\Delta\theta^2+8\ddot{U}\ddot{V}\Delta\theta\Delta\varphi+$$

$$+2\ddot{V}^2\varepsilon_0\Delta\varphi+2\ddot{V}^2\Delta\varphi\Delta\varepsilon)+\frac{1}{6g^2}(7\ddot{U}^3\Delta\theta+7\ddot{V}^3\Delta\varphi+6\ddot{U}^2\ddot{V}\Delta\varphi+$$

$$+9\ddot{U}\ddot{V}^2\Delta\theta+\ddot{V}^3\varepsilon_0+\ddot{V}^3\Delta\varepsilon). \tag{15}$$

上式各项可以按其性质分为三类[2]：

1. 系统项　　例如 $\ddot{U}^2$, $\ddot{U}^2\Delta\theta^2$ 等．它们在观测平均值中不能消除，需要引入相应的改正．下面我们估算其影响时，保留大于 0.5 毫伽的各项．

2. 偶然项　　例如 $\ddot{Z}$, $g\varepsilon_0\Delta\varphi$ 等．其中以 $\ddot{Z}$ 的影响为最大．如果重力仪阻尼足以消除 $\ddot{Z}$ 的影响，那么在观测平均值中所有偶然项都已消除．

3. 混合项　　例如 $\ddot{Z}\ddot{U}^2$, $g\Delta\varphi\Delta\varepsilon$ 等．在一般情况下，它们具有偶然项的性质，在平均读数中已经消除．但当它们的频率有某种组合时，会转化为系统性的影响．因为上述情况并不经常发生，所以我们估算其影响时，只保留大于 1 毫伽的各项．

取(15)式的观测时间平均值．系统项按下面积分公式估算：

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin^2\omega t\,dt=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin^4\omega t\,dt=\frac{3}{8},$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin^2\omega_1 t\sin^2\omega_2 t\,dt=\frac{3}{8},$$

例如

$$\frac{[\ddot{U}^2]}{2g}=\frac{\ddot{U}_0^2}{2g(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\sin^2\omega_u t\,dt=\frac{\ddot{U}_0^2}{4g}.$$

混合项的影响按下面的积分公式估算:

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\,dt\leqslant\frac{1}{2},\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_1 t\sin^2\omega_2 t\,dt\leqslant\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\sin\omega_3 t\,dt\leqslant\frac{1}{4},$$

例如

$$\frac{1}{2g^2}[\ddot{Z}\ddot{U}^2]=\frac{\ddot{Z}_0\ddot{U}_0^2}{2g^2(t_2-t_1)}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_z t\sin^2\omega_u t\,dt\leqslant\frac{\ddot{Z}_0\ddot{U}_0^2}{8g^2}.$$

在估算中假定，$\varepsilon_0\leqslant\frac{1}{20}$，当加速度不超过 50 伽时，$\Delta\theta$，$\Delta\varphi\leqslant 50'$，$\Delta\varepsilon\leqslant\frac{1}{2500}$；加速度不大于 20 伽时，$\Delta\theta$，$\Delta\varphi\leqslant 20'$，$\Delta\varepsilon\leqslant\frac{1}{6250}$.

估算结果列于表 2，以毫伽为单位.

表 2

(15) 式 中 的 项	加速度的幅度(伽)		(15) 式 中 的 项	加速度的幅度(伽)	
	50	20		50	20
系 统 项			混 合 项		
$\frac{[\ddot{U}^2]}{2g}$，$\frac{[\ddot{V}^2]}{2g}$	638	103	$\frac{1}{2g^2}[\ddot{Z}\ddot{U}^2]$，$\frac{1}{2g^2}[\ddot{Z}\ddot{V}^2]$	16.2	1.0
$\frac{1}{2}g[\Delta\theta^2]$，$\frac{1}{2}g[\Delta\varphi^2]$	51	8	$\frac{1}{2}[\ddot{Z}\Delta\theta^2]$，$\frac{1}{2}[\ddot{Z}\Delta\varphi^2]$	1.3	<1
$\frac{3}{8g^3}[(\ddot{U}^2+\ddot{V}^2)^2]$	3.7	<0.5	$\frac{1}{g}[\ddot{Z}\ddot{U}\Delta\theta]$，$\frac{1}{g}[\ddot{Z}\ddot{V}\Delta\varphi]$	9.3	<1
			$g[\Delta\varphi\Delta\varepsilon]$	2.9	<1

根据上表我们得到观测平均值的最后改正公式：在扰动加速度不大于 50 伽时，

$$[\delta g]=-\frac{[\ddot{U}^2]+[\ddot{V}^2]}{2g}+\frac{1}{2}g([\Delta\theta^2]+[\Delta\varphi^2])+g[\Delta\varphi\Delta\varepsilon]+\frac{1}{2g^2}([\ddot{Z}\ddot{U}^2]+[\ddot{Z}\ddot{V}^2])+\frac{1}{2}([\ddot{Z}\Delta\theta^2]+[\ddot{Z}\Delta\varphi^2])-\frac{1}{g}([\ddot{Z}\ddot{U}\Delta\theta]+[\ddot{Z}\ddot{V}\Delta\varphi])-\frac{3}{8g^3}[(\ddot{U}^2+\ddot{V}^2)^2];\tag{16}$$

在扰动加速度不大于 20 伽时，

$$[\delta g]=-\frac{[\ddot{U}^2]+[\ddot{V}^2]}{2g}+\frac{1}{2}g([\Delta\theta^2]+[\Delta\varphi^2]).\tag{17}$$

通常上述改正值是用长周期摆及短周期摆测定的. 长周期摆记录重力仪测量轴与铅垂线偏角的两个分量 θ 和 φ，短周期摆记录测量轴与瞬间垂线偏角的两个分量 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\varphi$，由长、短周期摆的记录联合求得水平加速度 $\ddot{U}$、$\ddot{V}$ 的平方的平均值[3]. 因此需在互相垂直的两个水平方向上分别设置一套长、短周期摆. 应当说明，长、短摆在 V 轴方向上

测定的角度与本文采用的φ和$\Delta\varphi$角稍有不同，前者在VW面上，而后者则在YZ面上，但其差值不超出我们讨论的精度范围，所以上面导出的(16)和(17)式可以直接应用.

当在潜水艇上进行测量时，常平架能够给出良好的观测结果. 但在水面航行的船上，由于扰动加速度较大，重力仪又附有很强的阻尼，常平架有较明显的下列三个缺点.

1. 当加速度达50伽时，需要在观测结果中引入近1300毫伽的改正值. 如要以2～3毫伽的精度求得这一改正，则必须使测定水平加速度的相对精度达到0.08%，但长、短周期摆很难满足这样的精度[2,3].

2. 强阻尼重力仪对改正值的感受有时间上的滞后，可能会歪曲改正的正确性. 对摆仪来说，这种情况不存在.

3. 在加速度超过20伽的情况下，需要顾及混合项的影响，但在实际工作中我们很难确定它的数值.

四、重力仪在陀螺仪摆上的观测

陀螺仪理论和技术是目前尖端科学技术之一，应用在不同领域中的陀螺系统，有各种各样的复杂结构. 我们只限于从重力测量的观点出发，利用最简单的陀螺仪摆的原理来探讨对这种装置的某些技术要求.

我们所考虑的系统是陀螺垂直器，或陀螺地平仪，是一种在运动的船上获得人造地平面的装置. 图5是陀螺垂直器装置的示意图，陀螺的外壳就是万向支架的内环，a_1和a_2是万向环轴，整个系统是一个球面摆. 陀螺转子的自转轴和球面摆轴相重合，转子以高速度绕其轴相对于内环转动. 重力仪固定在装置的内环，亦即和陀螺外壳固连在一起.

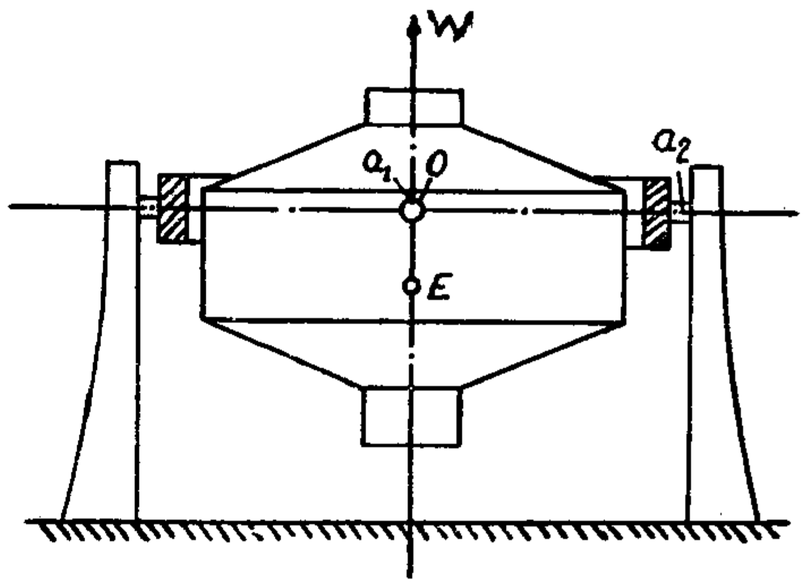


图 5

陀螺仪摆与常平架的情况不同，如果它偏离平衡位置，就不会自动回复到这一位置，而将作圆锥形的进动振荡，圆锥的顶点是系统的支点. 因此，船舶转弯、加速航行、船舶速度以及地球自转等等都会使陀螺仪摆的偏差积累，相对于铅垂线产生很大偏离. 为了消除这种偏差，通常需在摆中附加修正装置，人为地把陀螺引到任意给定的位置. 在没有加速度时，可以利用水准器或自由悬挂的摆控制修正装置；当有扰动加速度作用时，则需采用专门的设备. 研究各种偏差是陀螺仪理论的任务，我们讨论它对重力仪读数的影响时，可以把它们归纳为如下的表达式：

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \tag{18}$$

式中θ_1，φ_1为非周期性偏差角；θ_2，φ_2为与水平加速度周期不等的周期性偏差角；θ_3，φ_3为带有水平加速度周期的偏差角，它是由于水平加速度的作用而产生的，我们将在下面找出它和水平加速度的关系.

陀螺仪摆运动方程和常平架运动方程的区别是，在前一方程中应附加陀螺力矩，陀螺力矩可以用下面的向量积表示：

$$\vec{M}' = H \times \Omega,$$

式中 H 为陀螺的角动量，$H = I\omega$，I 为陀螺转子相对于自转轴的转动惯量，ω 为转子的自转角速度. 力矩 $\bar{M}'$ 在 U，V 和 W 轴上的投影为：

$$\bar{M}'_u = -H\dot{\theta},\quad \bar{M}'_v = -H\dot{\varphi}\cos\theta,\quad \bar{M}'_w = 0. \tag{19}$$

把(9)式对时间的导数连同(8)，(10)和(19)式代入欧拉动力学方程(7)，略去 θ，φ 及其导数的二次以上各项，则得：

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\varphi} - H\dot{\theta} + MgL\varphi + M\ddot{V}L &= 0,\\ A\ddot{\theta} + H\dot{\varphi} + MgL\theta + M\ddot{U}L &= 0,\\ \frac{dK_w}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

在这一方程中，我们也略去了阻尼力矩和垂直加速度产生的力矩，因为它们的影响很小.

研究实用陀螺仪的运动时，通常可以把章动项略去[4]，亦即舍弃方程(20)中的 $A\ddot{\varphi}$ 和 $A\ddot{\theta}$ 项.

方程(20)中的第三式对我们没有什么意义，它的积分为 K_w = 常数. 上面已提到，我们这里研究的是偏角 θ_3 和 φ_3，因此方程(20)的第一式和第二式可改写为：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\theta}_3 - k\varphi_3 - k\frac{\ddot{V}}{g} &= 0,\\ \dot{\varphi}_3 + k\theta_3 + k\frac{\ddot{U}}{g} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中 $k = \dfrac{MgL}{H}$ 为进动角速度. 解出方程(21)得：

$$\theta_3 = -\frac{\ddot{U}_0}{g}\frac{k^2}{k^2-\omega_u^2}\sin\omega_u t + \frac{\ddot{V}_0}{g}\frac{k\omega_v}{k^2-\omega_v^2}\cos\omega_v t,$$

$$\varphi_3 = -\frac{\ddot{V}_0}{g}\frac{k^2}{k^2-\omega_v^2}\sin\omega_v t - \frac{\ddot{U}_0}{g}\frac{k\omega_u}{k^2-\omega_u^2}\cos\omega_u t.$$

因为进动角速度很小，$k \ll \omega_u$，ω_v，故 θ_3 和 φ_3 的表达式可简化为：

$$\left.\begin{aligned} \theta_3 &= +\frac{\ddot{U}_0}{g}\frac{k^2}{\omega_u^2}\sin\omega_u t - \frac{\ddot{V}_0}{g}\frac{k}{\omega_v}\cos\omega_v t,\\ \varphi_3 &= +\frac{\ddot{V}_0}{g}\frac{k^2}{\omega_v^2}\sin\omega_v t + \frac{\ddot{U}_0}{g}\frac{k}{\omega_u}\cos\omega_u t. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

现在我们研究：为要消除水平加速度和仪器倾斜影响，陀螺仪摆应满足的条件. 在这种情况下，扰动影响改正公式(3)可以略去三次以上各项，因而有

$$\delta g = \frac{1}{2}g(\theta^2+\varphi^2) + \ddot{U}\theta + \ddot{V}\varphi + \ddot{Z} + \ddot{V}\varepsilon + g\varphi\varepsilon. \tag{3'}$$

上式中 $\ddot{Z}$ 是偶然项，可以在平均读数中消除，$\ddot{V}\varepsilon$ 和 $g\varphi\varepsilon$ 是混合项，当水平加速度和垂直加速度的频率相等时，产生 c-c 效应，但也可以通过重力仪结构和适当的测量方法予以消除[1,5]，所以我们不再估算它们的影响.

把(18)和(22)式代入上式，取观测时间平均值，略去包含 k^3 和 k^4 的微小项，并注意下面的积分公式：

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\cos\omega t\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\,dt=0,$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\sin^2\omega t\,dt=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\cos^2\omega t\,dt=\frac{1}{2},$$

可得

$$[\delta g]=\frac{1}{2}g(\theta_1^2+\varphi_1^2)+\frac{1}{4}g(\theta_{02}^2+\varphi_{02}^2)+\frac{3\ddot{U}_0^2}{4g}\frac{k^2}{\omega_u^2}+\frac{3\ddot{V}_0^2}{4g}\frac{k^2}{\omega_v^2},\tag{23}$$

式中 θ_{02}, φ_{02} 为周期性偏角 θ_2 和 φ_2 的振幅. 设 $\ddot{U}_0=\ddot{V}_0=100$ 伽, $\omega_u=\omega_v=0.5$, 要求上式每一项的影响小于 0.5 毫伽,则陀螺仪摆应满足下列条件:

$$\theta_1,\ \varphi_1\leqslant 3'.5,\ \theta_2,\ \varphi_2\leqslant 7'.0,\ k\leqslant 0.004,$$ 亦即进动周期 $T=\frac{2\pi}{k}\geqslant 26$ 时分.

五、結　束　語

最后,我们简单叙述一下得到的主要结论:

1. 重力仪強阻尼能够消除垂直加速度和所有偶然项的影响，而由強阻尼引起的滞后误差,可以利用本文讨论的阻尼方法予以避免.

2. 如果扰动加速度不超过 20 伽，则重力仪在常平架上的观测只需引入二次项改正,高次项影响可以忽略. 如果重力仪阻尼很大,并采用一次阻尼,则需要顾及它对重力变化和二次项改正的滞后,并引入相应的滞后时间改正或采取其他有效措施.

3. 如果扰动加速超过 20～30 伽,则重力仪在常平架上的观测需要顾及高次项影响.

4. 利用陀螺仪摆进行海洋重力测量是值得注意的发展方向，如果陀螺仪摆(单陀螺)满足下列条件：非周期性偏差角 θ_1, φ_1 小于 3～4′;与水平加速度周期不等的周期性偏差角 θ_2, $\varphi_2\leqslant 7'$; 进动周期 T 大于 26 时分; 则可以消除 100 伽以下的水平加速度影响,在观测结果中不需引入任何改正.

参　考　文　献

[1] 张善言、李锡其，应用重力仪进行海洋重力测量，测绘学报，第六卷，第二期，1963.

[2] Романюк, В. А., Определение ускорения силы тяжести гравиметром, установленным на подвижном основании, Тр. Ин-та физика земли АН СССР, вып. 18, 1961.

[3] Романюк, В. А., Определение силы тяжести на море маятниковым способом, III, *Изв. АН СССР, серия геофиз*, № 1, 1958.

[4] 布尔加科夫，Б. В.，陀螺仪实用理论(中译本)，国防工业出版社，1961.

[5] Graf, A., Inprovements on the Sea Gravimeter GSS-2, *J. Geoph. Research*, Vol. 66, No. 6, 1961.

[6] Скарборо, Джемс Б., Гироскоп теория и применения, Издательство иностранной литературы, М., 1961.

[7] 格兰曼，R.，迴转仪的理论和应用(中译本)，科学出版社，1959.

[8] 罗森别尔格，Я. Н.，多陀螺垂直器，陀螺仪理论及其应用译文集，第一集，科学出版社，1960.

测量与地球物理集刊
第 二 号

关于地下鉄道貫通誤差的討論

李　　平

地下铁道测量工作的內容很广，其中最主要的任务是保证地下铁道的贯通．贯通误差的大小直接影响到地下铁道建设的成败及其造价，因而根据各地下铁道施工方法和具体情况，合理地规定其贯通误差允许值是地下铁道建设中一项重要的研究任务．只有在确定了贯通误差允许值之后，地下铁道测量人员才能进一步地制订出地下铁道建设中各项测量工作的精度要求．

一、限 界 概 念

为了便于讨论，现将地下铁道建筑中的限界概念先简略介绍如下．

地下铁道的横断面是根据运行时用的车辆及设备的尺寸所决定的限界设计的．在地下铁道设计中有下列几种主要限界：

1. 车辆限界，

2. 设备接近限界(设备限界)，

3. 建筑接近限界(建筑限界)．

车辆在高速度运行时，其任一点均不许突出的輪廓线，称为车辆限界．在确定车辆限界的各个控制点时，要考虑到制造上的公差、行走部分的磨耗、车辆一侧整套弹簧损坏的可能性、以及车辆在运行中由于横向及纵向的颠簸而产生的偏斜．

设备接近限界也为一輪廓线．隧道內的各种供电设备、照明设备、电缆和信集闭等装置均不能进入这一輪廓线．

建筑接近限界是隧道衬砌的內部輪廓线，这里需要顾及在隧道掘进时和在断面下部敷设地下铁道线路时由于衬砌而产生的偏差与变形．因此，一般由于顾及到这些因素而

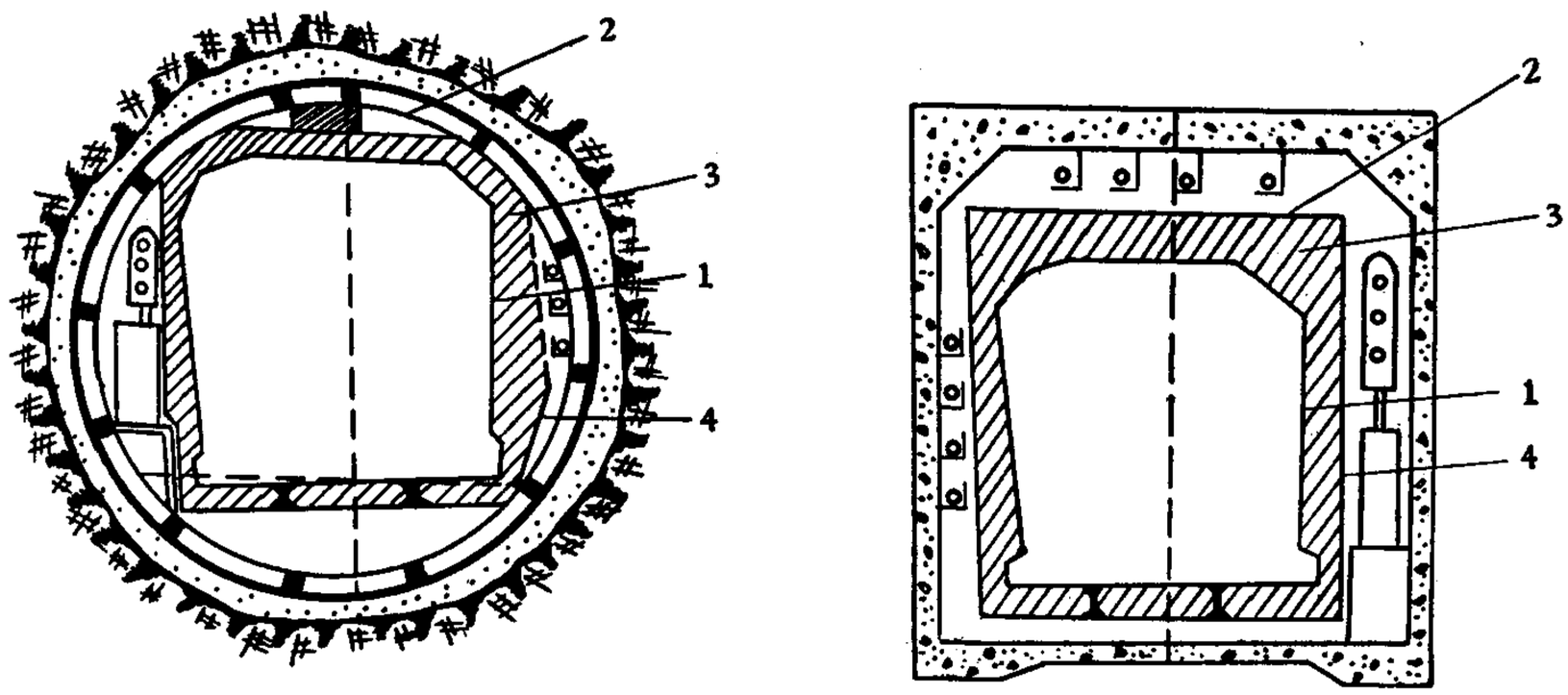


图　1

将建筑接近限界扩大，其扩大部分就是本文将要提到的限界余量(安全空隙).

图 1 表示圆形隧道断面和矩形隧道断面中的各种限界，其中 1 为车辆限界，2 为建筑接近限界，4 为设备接近限界，3 为限界余量.

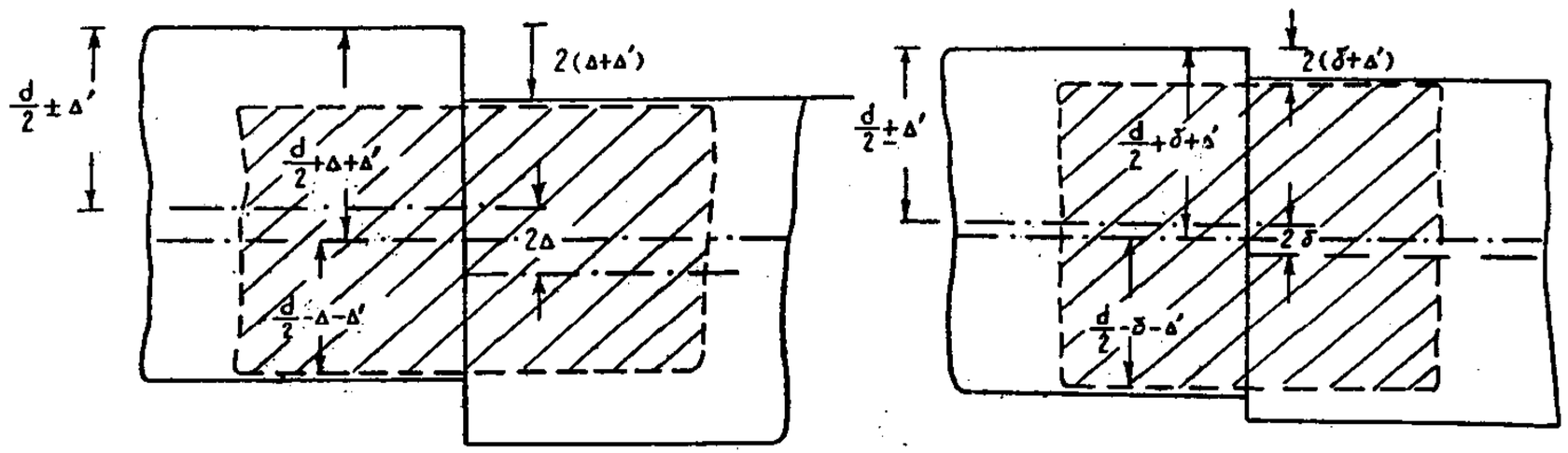
二、確定貫通誤差的理論依据

对贯通误差允许值大小的讨论，目前具有不同的观点. 总的说来，现有文献对此问题的论述还缺乏系统性，在某些方面概念还不够清楚.

我们认为贯通误差允许值的大小，应根据以下两个因素来确定.

1. 贯通误差允许值的大小决定于所给定的限界余量. 如果放宽限界余量，就能有較大的可能保证隧道的贯通. 显然，限界余量的增大，可以允许施工和测量精度相应地減低，但增大限界余量，会造成隧道工程在人力、物力和材料上的浪费. 因此，必须根据施工技术条件合理地给定限界余量，使它既能保证隧道的贯通，又能多快好省地建设隧道.

为了明了起见，现用图 2 来说明限界余量和两施工轴线贯通误差间的关系.



隧道 A　　隧道 B

图　2

设有直径 d 相同，而限界余量各为$(\Delta+\Delta')$和$(\delta+\Delta')$的 A，B 两隧道(这里Δ和δ各为 A，B 隧道施工轴线偏离最终轴线的允许值，Δ' 为除了Δ或δ以外影响衬砌偏离设计位置的其他各因素的总和). 为了使所建隧道满足设计要求，保证车辆在隧道中自由和安全地运行，必须使 A，B 两隧道中两个施工轴线的贯通误差和其限界余量相应. 如图 2 所示，隧道 A 的两施工轴线的贯通误差应为 2Δ，隧道 B 的应为 2δ. 由此可见，隧道限界余量和施工轴线间的贯通误差值有密切关系. 随着限界余量的增大，施工轴线之间的贯通误差允许值也可相应的放宽.

2. 贯通误差允许值的大小决定于施工及衬砌时所采用的方法.

地下铁道的施工方法系根据该地区水文条件、地质条件、隧道的使用意义以及其造价等因素而定，大体可分两类，即开做式(明挖法)施工与封闭式(暗挖法)施工. 一般暗挖法施工用于深埋隧道，而明挖法施工则用于浅埋隧道.

由于施工方法的不同，隧道施工条件也有所差别. 暗挖隧道在地下进行施工，条件較差，而所要求的技术装备也較复杂(包括施工和测量工作). 因此，为了保证隧道贯通，必须采取一系列技术措施和进行精密可靠的测量工作.

为了顾及到以上这些条件，一般对深埋暗挖隧道的设计限界余量都适当地放宽，虽然

这会使隧道造价增大，但是为了保证整个隧道免受损坏，这样的措施可认为是必须的和积极的. 与此相反，明挖施工隧道的限界余量可以适当减小，以减低隧道的造价.

又贯通误差允许值的大小，还必须从隧道衬砌結构间联接的技术要求出发，即必须保证建成的隧道在結构上的坚固性. 否则以后在运营过程中将会产生倒塌或漏水等事故，整个隧道将被破坏.

目前地下铁道衬砌方法大致可分二种，即整体式浇灌钢筋混凝土衬砌和预制钢筋混凝土管片的装配式衬砌，而以装配式衬砌为主.

整体式衬砌是用直接安放模板，浇灌钢筋混凝土进行衬砌的，故对衬砌結构间连接的要求不高.

装配式的钢筋混凝土管片是成批由工厂預制成的，每块管片间在結构上均有着紧密的联系. 如有很大的贯通误差，就可能造成在贯通处有时用标准管片无法拼装的情况，而需要用特殊形式的管片进行拼装或用浇灌混凝土的方法来处理，这会对隧道結构坚固性带来一定的损害. 因此，在装配式衬砌情况下，不能为了达到贯通目的，而无限制地增大限界余量，这样做不但使隧道造价增大，而且往往会招致隧道衬砌結构破坏. 由此可见，以上所述的两个依据是相互制约的.

三、用各种施工方法建造地下鉄道时，其貫通誤差允許值的確定

深埋地下铁道，一般都采用盾构法或半盾构法进行暗挖施工，其隧道断面通常呈圆形，并用預制管片作装配式衬砌. 浅埋地下铁道一般是用明挖法施工，但是在个别区域内，由于城市管网和交通问题不易解决，也有采用盾构法进行暗挖的. 因而其断面有矩形的、也有圆形的，其衬砌可用浇灌混凝土的整体式方法，同时也可用預制管片装配式的方法.

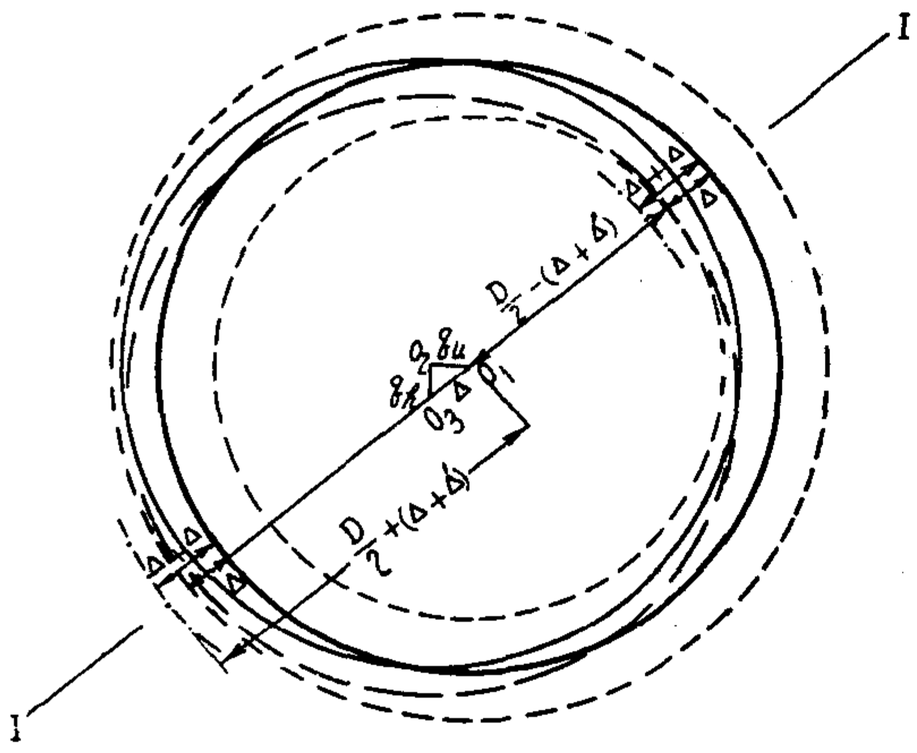


图 3

地下铁道设计中一般规定：深埋暗挖和浅埋暗挖的地下铁道限界余量为100毫米；浅埋明挖的地下铁道限界余量为50毫米. 现在即根据以上规定推导各类地下铁道贯通误差的允许值.

1. 深埋暗挖的地下铁道

设一直径为D的隧道，由A，B两个竖井同时进行相向开挖. 图3中粗线条位置为隧道在贯通面上应有的设计位置（其轴线投影为O_1）. 但由于平面上和高程上测量控制误差的影响，使从竖井A建造过来的隧道，在贯通面上占据另一个位置，即细虚线所画的位置（其轴线投影为O_3）. 设计轴线和隧道施工轴线的偏差为Δ. 又由于管片安装误差及管片变形等的影响，

致使在贯通面上实际衬砌的位置为图上的点划线的位置．此时衬砌至隧道轴线的距离不再是 $\frac{D}{2}$，而是 $\frac{D}{2}-(\Delta+\Delta')$ 或 $\frac{D}{2}+(\Delta+\Delta')$[1]．为了使隧道贯通，必须使 $(\Delta+\Delta')$ 值不大于所规定的限界余量，即最大不超过 ±100 毫米．

图 4 表示该隧道从竖井 A，B 相向建造时在贯通面上所处的情况．在图 3 上 Δ 表示从竖井 A 所敷设的施工轴线与最终轴线（接近于设计轴线）的偏差，则在图 4 上的 2Δ 即为两施工轴线间在贯通面上的允许偏差．

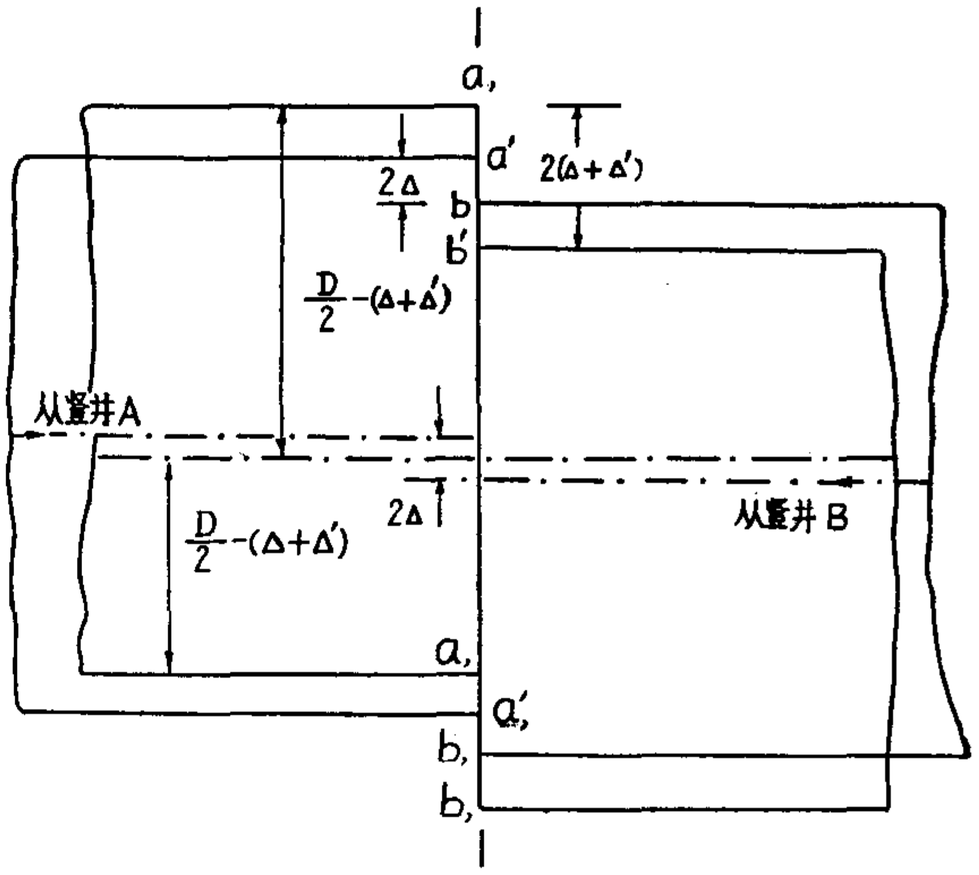


图　4

在贯通面上隧道衬砌离原有设计位置的偏差，是由下列原因造成的：测量控制误差 f_1，管片安装误差 f_2，椭圆率影响 f_3 以及衬砌变形影响 f_4．其中由于岩层压力的作用，使圆环由圆形变成椭圆形，以致圆环实际直径与设计直径发生差异，一般称为圆环椭圆率影响．而隧道施工时的压浆不够，销钉不紧，岩层压力不均匀等则造成衬砌的变形．隧道施工技术规程规定：f_2 为 ±50 毫米，f_3 为 ±25 毫米（当举重器推出后，圆环椭圆率不能超过 50 毫米，对半径影响则为 25 毫米），f_4 为 ±50 毫米．

由上述可知，$\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2+f_4^2}\leqslant\pm100$ 毫米，因此得 f_1 为 ±66 毫米．这里的 f_1 即是上述的 Δ，故得 Δ 为 ±66 毫米．

从图 3 看出，Δ 是由测量控制的横向误差 q_u 和高程误差 q_h 形成，按等影响原则考虑，$\Delta^2=q_u^2+q_h^2$；$q_h=q_u$，则得 $q_u=\pm47$ 毫米．

显而易见，q_u 是施工轴线和最终轴线的允许横向位移值，故可把算得的 q_u 值作为两施工轴线横向贯通中误差值，即 $m_q=\pm47$ 毫米．

从国外过去建造地下铁道的经验中得知，高程测量控制精度較平面测量控制精度容易保证．因此，我们只要有意识地稍为提高高程测量精度，就能放宽对平面测量的精度要求，这样做是有利的．

至于高程和平面测量间精度的比例关系，则应根据隧道的具体测量条件以及仪器设备决定．一般说来，高程测量控制误差约为平面测量控制误差的一半（$q_u=2q_h$）．如按上述比例关系考虑，则 $\Delta^2=(0.5q_u)^2+q_u^2$，得 $q_u=\pm60$ 毫米，$q_h=\pm30$ 毫米．結果表明，如果我们能保证高程测量控制精度在 3 厘米以内（这对一般隧道是不成问题的），则平面测量控制限制限差可以放宽到 6 厘米．

1）这里（$\Delta+\Delta'$）是所有误差影响的总和．

2. 浅埋明挖的地下铁道

如果明挖隧道由单向进行衬砌，则不存在隧道贯通问题，但一般明挖隧道往往从两个车站同时相向衬砌，故这里同样存在贯通问题.

前面已经讲到，明挖隧道的断面一般呈矩形，因此对限界余量的考虑与圆形断面隧道有所不同. 这里只要考虑到竖向（高程上）和横向，因为斜向的余量一定会比竖向或横向大，这可从图 5 中看出. 例如在限界控制点 6 或 2 处，u 和 h 总是小于 K. 因此，在明挖隧道中高程贯通偏差和横向贯通偏差可以单独考虑，互不影响. 此时，我们可以这样认为：隧道高程上的贯通误差只与高程测量有关，而横向贯通误差只与平面测量有关. 因为高程贯通容易保证，本文中不再详述，以下只研究隧道的横向贯通精度.

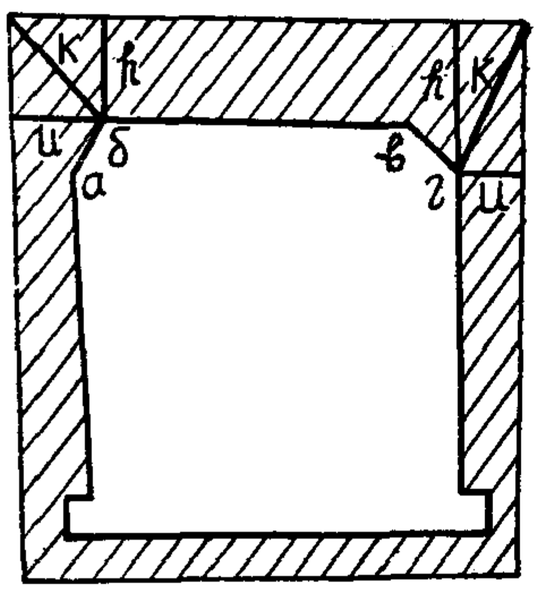


图 5

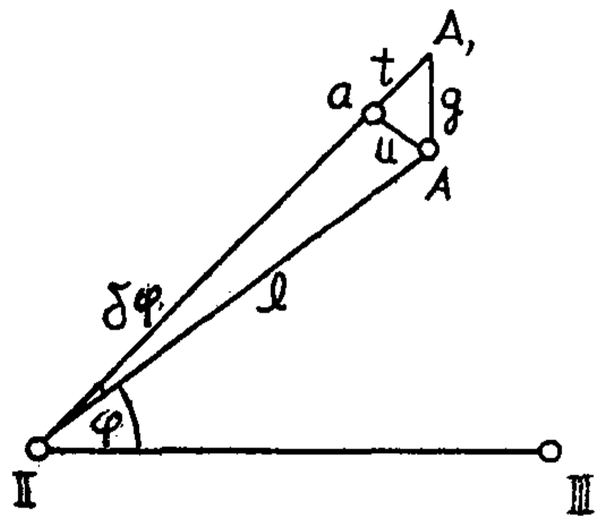


图 6

明挖隧道的衬砌偏离设计位置，主要是由于施工轴线本身的误差、模板线放样时的测量误差、立模误差以及变形所产生的误差等引起的，设各误差的允许值分别为 f_1', f_2', f_3', f_4'. 根据国内外施工经验和我国有关设计单位的现行规范规定： 立模误差不能大于 ± 20 毫米，即 $f_3' = \pm 20$ 毫米（为了保证这个要求，测量员必须在立模过程中经常检查模板平面与模板线放样时所给定的垂直面之间的差异）；变形误差不能大于 ±20 毫米，即 $f_4' = \pm 20$ 毫米（当修建地下铁道时，在挖掘岩石的过程中，由于强大的土石压力，坑道的支撑，钢筋混凝土衬砌或已建成的建筑物都可能产生变形. 根据水文地质条件，在岩石压力作用的不同方向上，发生各种不同的变形，如建筑物下沉，筑成的墙壁的内移. 在这里我们只研究平面横向位移，对建筑物下沉暂不考虑）.

根据测量工具和外界条件，可定出模板线放样时的测量误差.

在图 6 中 II, III 点为地下控制点，A 为模板某点的设计位置，由于测角和量边误差，使 A 点产生横向位移 q.

$$Aa = l \sin \delta\varphi = u; \qquad A_1a = \delta l = t,$$

$$q = \pm \sqrt{u^2 + t^2}.$$

如果放样系用普通钢带尺和普通 30″ 经纬仪进行，并设放样点到控制点的距离不超过 10 米（因地下施工控制点之间的距离一般在 20 米左右）. 此时，$\delta\varphi = \pm 1'$; $\delta l = \pm 10$ 毫米，于是可求得 $q = \pm 11$ 毫米，即模板线放样时的测量误差极大值 $f_2' = \pm 22$ 毫

米.

如上所述，明挖隧道的限界余量为 50 毫米. 因此，不难求出施工轴线误差的允许值 $f_1' = \pm 35$ 毫米，即两施工轴线的横向贯通中误差不应大于 ±35 毫米.

虽然这里所要求的精度看起来比深埋隧道所要求的精度为高，但由于明挖施工条件較好，而且在这里不存在平面控制测量中的主要误差——定向误差，因此这个精度还是容易达到的.

四、結　　語

地下铁道是一种用于客运的铁路网，其设计应根据城市平面及立面规划的特点，并顾及城市的发展远景及城市地下工程的修建情况. 该网中一般包括一系列立体交叉的深埋隧道和浅埋隧道.

为了保证铁路网中的所有隧道都能贯通，要求建立一个统一的测量控制网. 本文中所确定的贯通误差值能否满足这个要求尚须略加说明.

由本文得出的深埋隧道和浅埋隧道施工轴线之间的贯通中误差值，可以算出深埋隧道和浅埋隧道对地面上的平面控制测量的精度要求. 从文献[1]中可知：

深埋隧道

$$q_{深} = \pm \frac{\Delta_{深}}{\sqrt{5}};$$

浅埋隧道

$$q_{浅} = \pm \frac{\Delta_{浅}}{\sqrt{3}}.$$

并将本文中得出的 $\Delta_{深} = \pm 47$ 毫米，$\Delta_{浅} = \pm 35$ 毫米代入上式后，则得

$q_{深} = \pm 21$ 毫米，$q_{浅} = \pm 21$ 毫米.

以上计算結果表明，虽然本文中对深埋隧道和浅埋隧道施工轴线之间的贯通误差的要求有所不同，而最终对地面上的平面控制测量的精度要求却是一致的. 按这样的精度建立的平面控制网能够满足和保证地下铁道铁路网中的所有隧道贯通的要求.

参　考　文　献

[1] Баранов, А. Н., Геодезия в тоннелестроении, Издательство геодезической и картографической литературы, Москва, 1953.
[2] Лебедев, Н. Н., Инженерная геодезия часть VI, Геодезиздат, М., 1959.
[3] Черемисин, М. С., Геодезические сети при крупном подземном строительстве, Издательство геодезической литературы, 1960.
[4] Лиманов, Ю. А., Метрополитены.
[5] 纳乌莫夫，地下铁道，唐山铁道学院，1959.
[6] 苏联地下铁道设计技术规程.

测量与地球物理集刊
第 二 号

地面立体摄影测量誤差及建立摄影测量网的方法*

張海根　　余冠英

一、前　　言

为了解决航测大比例尺测图中利用地面摄影测量进行连测的精度问题，和地面摄影测量中高精度地形测图的问题，根据当前地面立体摄影测量的摄影及制图仪器，对地面立体摄影测量內外方位元素对座标值的影响可能产生的误差，以及航线加密控制点基本上是位于一直线上的情况，设想以"直伸导线"（概念与普通测量上的直伸导线一样）作为摄影站的导线，进行摄影和建立摄影测量网，并按此法进行了实验和精度分析。

蔡司 1318 型立体自动测图仪，不仅能根据正直和同偏水平摄影的象对进行测图，而且由于该仪器的特有结构，能配合蔡司 19/1318 摄影经纬仪物镜作上下移动时所摄的象片进行测图。制图的机械解法满足下列正直水平摄影公式：

$$Y = \frac{Bf}{x' - x''} = \frac{Bf}{P}, \tag{1}$$

$$X = \frac{Yx'}{f} = \frac{Bx'}{P}, \tag{2}$$

$$Z = \frac{Yz'}{f} = \frac{Bz'}{P}; \tag{3}$$

及同偏水平摄影公式：

$$Y_{偏} = \frac{Bf}{P}\left(\cos\varphi \pm \frac{x''}{f}\sin\varphi\right), \tag{4}$$

$$X_{偏} = \frac{Bx'}{P}\left(\cos\varphi \pm \frac{x''}{f}\sin\varphi\right), \tag{5}$$

$$Z_{偏} = \frac{Bz'}{P}\left(\cos\varphi \pm \frac{x''}{f}\sin\varphi\right). \tag{6}$$

这些简单公式给予机械解法和解析计算以很大的便利，但是由于內外方位元素的影响而带来了一定的误差，要提高精度就必须从误差理论讨论起。本文在讨论了此种误差影响公式之后，提出了对量测仪器的校正及加密平面及高程控制点的要求，并提出了建立摄影网的方法。最后在此基础上进行一条直伸导线的試驗，并对各种精度情况，进行了分析。

---

* 本文系在张海根："地面立体摄影测量內外方位元素对座标值影响的讨论及其在 1318 型立体自动测图上建立摄影测量网的方法"（未发表）一文的基础上进行实验和精度分析后所得的结论。

参加外业工作的尚有王黎、周硕愚、倪鹤立等同志，参加內业计算工作的尚有胡庭辉、王黎、周硕愚、王庆廷等同志。

二、正直水平摄影的誤差影响

如果基线量测、横视差量测、实际主距及象片座标量测含有误差 dB, dp, df, dx', dx'' 及 dz', 那末根据公式(1)—(3)所产生的误差 dY, dX, 及 dZ 可以写成:

$$dY = \frac{Y}{B}dB + \frac{Y}{f}df - \frac{Y^2}{Bf}dp, \tag{7}$$

$$dX = \frac{X}{B}dB + \frac{Y}{f}dx' - \frac{XY}{Bf}dp, \tag{8}$$

$$dZ = \frac{Z}{B}dB + \frac{Y}{f}dz' - \frac{YZ_1}{Bf}dp, \tag{9}$$

式中

$$dP = dx' - dx''.$$

从公式(7)—(9)中可以看出,误差 dp 对 dY, dX 及 dZ 的影响很大. 为了要进一步了解误差 dp, 必须分别讨论摄影象对的内外方位元素的误差影响. 现在以内外方位元素(对左象片的)的影响为例进行讨论.

从实际工作中证明, 在野外摄影时包括有下列几方面的影响(下面只说明左方象片, 右方象片同理可以说明).

1. 象主点位置误差

这个误差是由于象片框标连线所确定的主水平线和主纵线的交点位置不正确所产生的,见图 1. 如果主纵线发生平移则在横轴上产生 dx'_0; 如果水平线发生平移,则纵轴上产生 dz'_0; 如果在纵线和水平线都发生平移,则在横轴和纵轴上相应地产生 dx'_0 和 dz'_0.

同理证得:

$$\left.\begin{aligned} dx'_{x_0} &= -dx'_0, \\ dx'_f &= \frac{x'}{f_1}df'; \\ dz'_{z_0} &= -dz'_0, \\ dz'_f &= \frac{z'}{f_1}df'. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2. 主 距 误 差 *df*

主距误差就是摄影机上所提供的主距 f 不等于摄影时的主距 f_1, 主要是由于仪器在运输过程中受了震动,仪器常数发生了变化,摄影负片本身有某种程度的不平, 或者暗盒沒有放到应有的位置上等原因所致. 见图 1 和图 2.

3. 底片在镜箱内不垂直于主光轴(或者由于底片沒有压平,而处于倾斜状态)

误差 $d\gamma_x$ 和 $d\gamma_z$ 分别表示底片与 x 轴的倾斜分量和与 z 轴的倾斜分量. 根据图 3 可求得:

$$dx'_{\gamma_x} = \frac{x'df_m}{f} = -\frac{x'd\gamma_x x'}{f} = -\frac{x'^2}{f}d\gamma'_x; \tag{11}$$

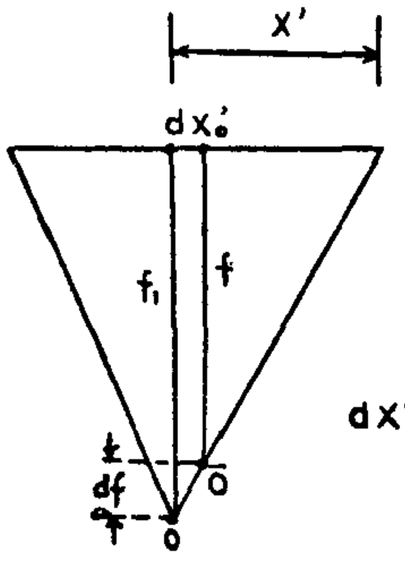
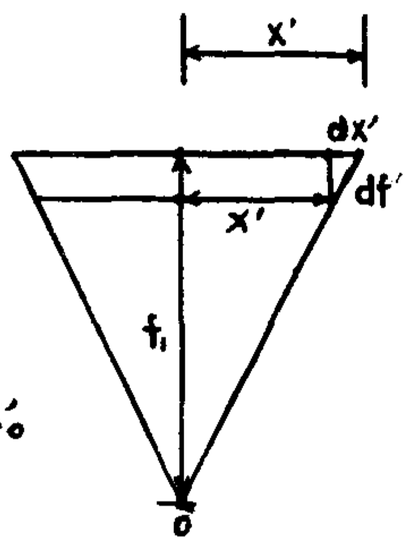


图 1



$$dx' = -dx'_0$$

图 2

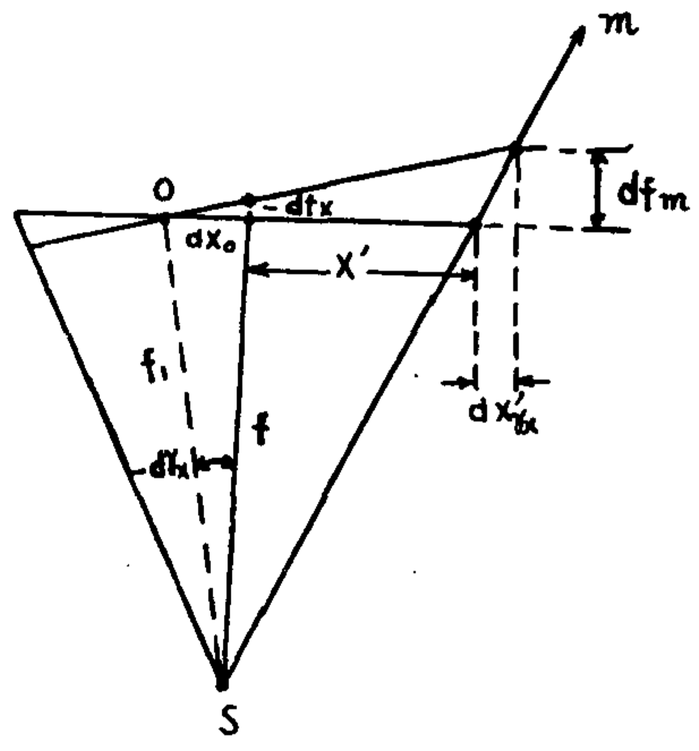


图 3

同理可证:

$$dz'_{\gamma_z} = -\frac{z'^2}{f}d\gamma'_z. \tag{12}$$

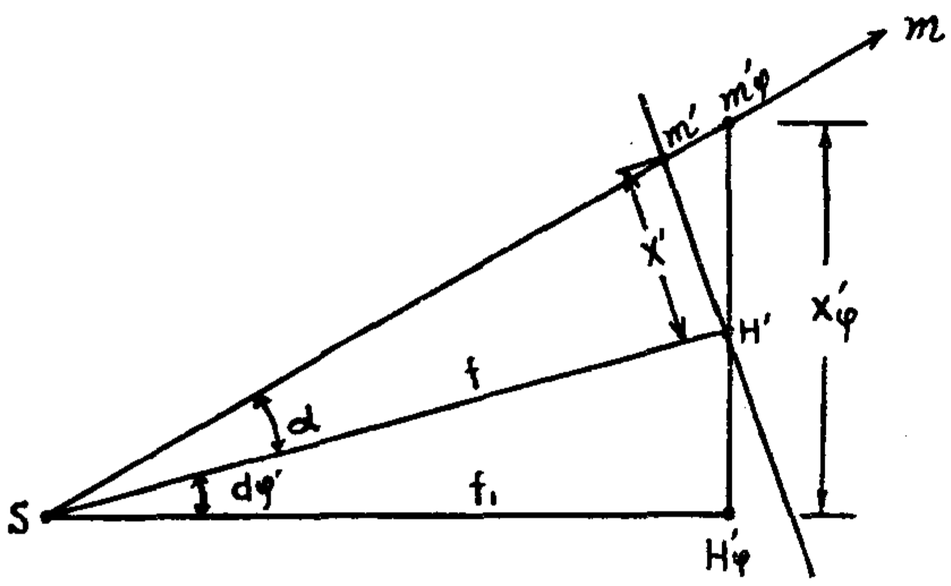
底片与 z 轴倾斜而影响 x 轴上量测值的误差为:

$$dx'_{\gamma_z} = -d\gamma'_z\frac{x'z'}{f}; \tag{13}$$

底片与 x 轴倾斜而影响 z 轴上量测值的误差为:

$$dz_{\gamma_x} = -d\gamma'_x\frac{x'z'}{f}. \tag{14}$$

4. 偏斜误差 $d\varphi$



平面图

图 4

所谓偏斜误差是指在摄影时，摄影镜箱主光轴实际相对于主光轴处的位置，产生的偏斜误差 $d\varphi$. 这些误差是由于使用了未检查过的定向装置，或者是在基线端点上定线时，利用短基线测摄了远距离 Y 所致.

$$\frac{x'}{f} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{15}$$

$$\frac{x'_\varphi}{f_1} = \operatorname{tg}(\alpha + d\varphi') = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}d\varphi'}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}d\varphi'}. \tag{16}$$

将公式(15)代入(16)式，并展开成级数，只取到二次项，则

$$\frac{x'_\varphi}{f_1} = \frac{x'}{f} + \left(1 + \frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi',$$

$$dx'_\varphi = x' - x'_\varphi = -f_1\left(1 + \frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi'. \tag{17}$$

由图 5 可知，

$$\frac{z'}{f} = \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{z'_\varphi}{f\cos d\varphi' + x'_\varphi \sin d\varphi'},$$

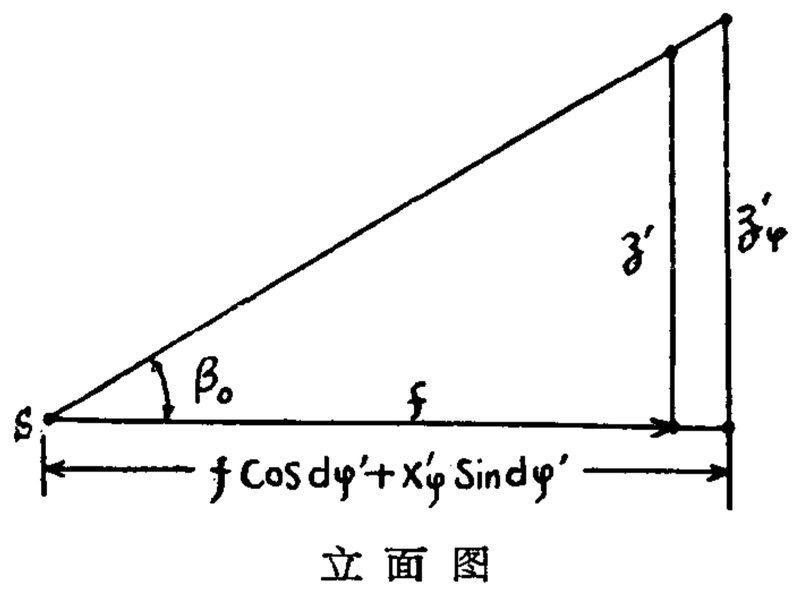
$$dz'_\varphi = z' - z'_\varphi = -\frac{x'z'}{f}d\varphi'. \tag{18}$$

5. 摄影光轴倾斜误差 $d\omega$

这个误差是由于在摄影瞬间摄影机主光轴不位于水平位置所产生的。这种情况是由于平行于主光轴的水准器，沒有置平或者水准轴与主光轴沒有平行所致。其结果使负片处于倾斜的位置，产生象点纵横坐标误差，见图 6 和图 7。

$$\frac{x'}{f} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{x'_\varphi}{f\cos d\omega' + z'_\varphi \sin d\omega'},$$

$$dx'_\omega = x' - x'_\omega = -\frac{x'z'}{f}d\omega'; \tag{19}$$



立 面 图

图 5

同理可证：

$$dz_\omega = -f_1\left(1 + \frac{z'^2}{f^2}\right)d\omega'. \tag{20}$$

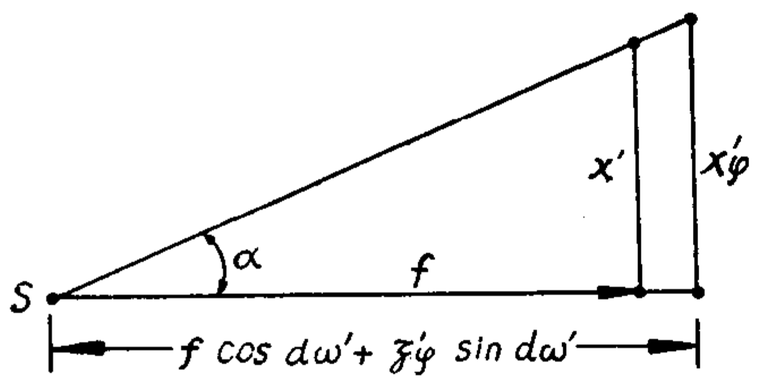


图 6

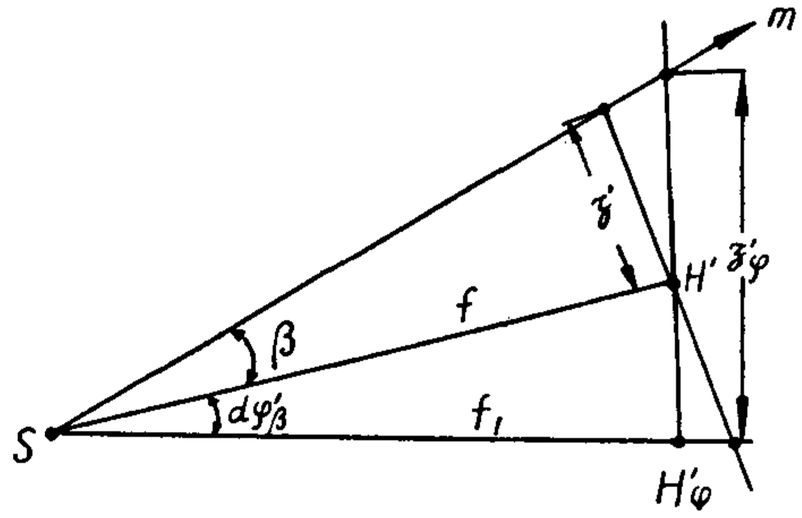


图 7

6. 底片旋转误差（象片框标连线的倾斜误差）$d\kappa$

如果在摄影瞬间，由于水平轴方向的水准器沒有置平，于是负片平面本身产生了旋转误差，从而由此底片上所量测出的横座标及纵座标均含有误差，见图 8。

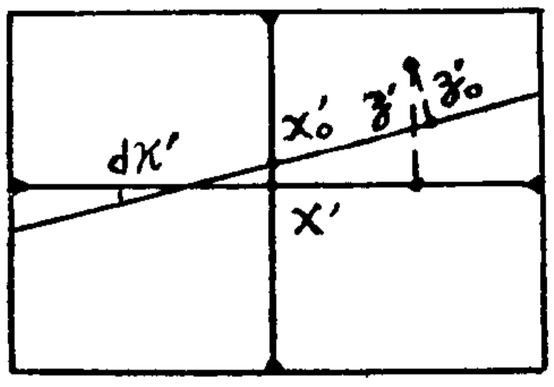


图 8

$$dx'_\kappa = (-x'\sin d\kappa' + z'\cos d\kappa'),$$

$$dz'_\kappa = -(z'\sin d\kappa' + x'\cos d\kappa').$$

因为 $d\kappa$ 的角值很小，所以

$$dx'_\kappa = z'd\kappa', \tag{21}$$

$$dz'_\kappa = -x'd\kappa'. \tag{22}$$

上列六种误差的代数和，即为在左象片上所产生的座标总误差，可用下列两公式表示：

$$dx' = -dx'_0 + \frac{x'}{f_1}df' - \frac{x'^2}{f}d\gamma'_x - \frac{x'z'}{f}d\gamma'_z - f_1\left(1+\frac{x'^2}{f^2}\right)d\varphi - \frac{x'z'}{f}d\omega' + z'd\kappa', \quad (23)$$

$$dz'_1 = -dz'_0 + \frac{z'}{f_1}df' - \frac{x'z'}{f}d\gamma'_x - \frac{z'^2}{f}d\gamma'_z - \frac{x'z'}{f}d\varphi' - f_1\left(1+\frac{z'^2}{f^2}\right)d\omega' - x'd\kappa'. \quad (24)$$

同理,可求得右象片上的座标总误差公式(25):

$$dx'' = -dx''_0 + \frac{x''}{f_2}df'' - \frac{x''^2}{f}d\gamma''_x - \frac{x''z''}{f}d\gamma''_z - f_2\left(1+\frac{x''^2}{f^2}\right)d\varphi'' - \frac{x''z''}{f}d\omega'' + z''d\kappa''. \quad (25)$$

又因为

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{f_1}{Y}X_1, \quad x'' = \frac{f_2}{Y}X_2, \\ z' &= \frac{f_1Z_1}{Y}, \quad z'' = \frac{f_2Z_2}{Y}, \\ dp &= dx' - dx'', \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

所以用公式(23)—(26)分别代入公式(7)—(9)式,并假定 $f_1 = f_2 = f$,经化简后,即可得到:

$$dY = \frac{Y^2}{Bf}(dx'_0 - dx''_0) - \frac{Y}{Bf}[X_1df' - X_2df''] + \frac{1}{B}[X_1^2d\gamma'_x - X_2^2d\gamma''_x] + \frac{Z_1}{B}[X_1d\gamma'_z - X_2d\gamma''_z] + \frac{1}{B}[(Y^2+X_1^2)d\varphi' - (Y^2+X_2^2)d\varphi''] + \frac{1}{B}[X_1Z_1d\omega' - X_2Z_2d\omega''] - \frac{Y}{B}[Z_1d\kappa' - Z_2d\kappa''] + \frac{Y}{B}dB + \frac{Y}{f}df, \quad (27)$$

$$dX = \frac{XY}{Bf}(dx'_0 - dx''_0) - \frac{Y}{f}dx'_0 - \frac{X}{Bf}[X_1df' - X_2df''] + \frac{X_1}{f}df' + \frac{X}{BY}[X_1^2d\gamma'_x - X_2^2d\gamma''_x] - \frac{X_1^2}{Y}d\gamma'_x + \frac{X}{BY}[X_1Z_1d\gamma'_z - X_2Z_2d\gamma''_z] - \frac{XZ_1}{Y}d\gamma'_z + \frac{X}{BY}[(Y^2+X_1^2)d\varphi' - (Y^2+X_2^2)d\varphi''] - \frac{Y^2+X_1^2}{Y}d\varphi' + \frac{X}{BY}[X_1Z_1d\omega' - X_2Z_2d\omega''] - \frac{XZ_1}{Y}d\omega' - \frac{X}{B}(Z_1d\kappa' - Z_2d\kappa'') - Z_1d\kappa' + \frac{Y}{B}dB + \frac{Y}{f}df =$$

$$= (①+③+⑤+⑦+⑨+⑪+⑬)^{项} + (②+④+⑥+⑧+⑩+⑫+⑭+⑮+⑯)^{项} =$$

$$= d(X)_1 + d(X)_2, \quad (28)$$

$$dZ = \frac{XZ_1}{Bf}(dx'_0 - dx''_0) - \frac{Y}{f}dz'_0 - \frac{Z_1}{Bf}[X_1df' - X_2df''] + \frac{Z_1}{f}df' + \frac{Z_1}{BY}[X_1^2d\gamma'_x - X_2^2d\gamma''_x] - \frac{X_1Z_1}{Y}d\gamma'_x + \frac{Z_1}{BY}[X_1Z_1d\gamma'_z - X_2Z_2d\gamma''_z] - \frac{Z_1^2}{Y}d\gamma'_z + \frac{Z_1}{BY}[(Y^2+X_1^2)d\varphi' - (Y^2+X_2^2)d\varphi''] - \frac{X_1Z_1}{Y}d\varphi' +$$

$$+\frac{Z_1}{BY}[X_1Z_1d\omega'-X_2Z_2d\omega'']-\frac{Y^2+Z_1^2}{Y}d\omega'-$$

$$-\frac{Z_1}{B}(Z_1d\kappa'-Z_2d\kappa'')-X_1d\kappa'+\frac{Z}{B}dB=$$

$$=(①+③+⑤+⑦+⑨+⑪+⑬)^{项}+(②+④+$$

$$+⑥+⑧+⑩+⑫+⑭+⑮)^{项}=$$

$$=d(Z)_1+d(Z)_2. \tag{29}$$

公式(27)—(29)是正直水平摄影时的座标误差公式，它们是由于在曝光瞬间摄影机的内外方位元素，及基线量测存在误差所引起的.

这些座标误差公式，在解析计算时，以及在立体自动测图仪上校正、作业或建立摄影测量网以推求误差时，均有其实际意义. 现在讨论如下.

(1) 从公式(27)中可以看出:

纵座标误差随 X^2 及 Y^2 传布成比例地增长，所以是最危险的；而在象片边缘上纵座标误差则随 XY 传布，也同样是最危险的.

摄影镜箱内本身存在的主点误差，一般是方向相同、大小相等，因此对 dY 沒有影响. 但是在立体自动测图仪上校正左右象片框的主点的位置，及安置象主点的位置时所产生的主点误差. 却不一定如此，它能随 Y^2 传布.

受摄影机内底片的压平误差及其摄影主光轴与 X 轴的倾斜误差 $d\gamma'_x$ 的影响而产生的象点移位 dY 的误差与 X^2 成比例，这在实际作业中也是不可避免的.

在摄影中安置（或测定）φ_1 及 φ_2 的时候，由于利用了很短的基线来量测与主光轴成直角或一定的偏角，而其偏角误差对于纵距误差 dY 的影响是随 Y^2 及 X^2 传布的，因此会产生很大的误差. 为此在野外作业过程中对测定 φ 值，及在立体自动测图仪上安装和校正 by 值时(同编摄影)要特别注意.

摄影镜箱本身存在的象片旋转误差，在左右摄影站高差很小时，对 dY 沒有影响. 在立体自动测图仪上利用固定的安片装置，不能消除在摄影瞬间所带来的象片旋角误差.

由于立体自动测图仪上左右象片的主距是可以安置的，故只要知道 df_1 及 df_2 值，就能够在仪器上将主距误差加以改正.

从公式(27)中更进一步看出：有几个定向元素或多或少地可以相互替代，例如 dx'_0，dx''_0 和 $d\gamma'_x$，$d\gamma''_x$ 可以利用 $d\varphi'$ 及 $d\varphi''$ 替代一部分，在立体自动测图仪上可以利用 by 进行补偿一部分. $d\omega'$ 及 $d\omega''$ 能够利用 $d\gamma'_z$；$d\gamma''_z$ 替代一部分，但在立体自动测图仪上沒有此项补偿的机械装置，因此底片倾斜误差及底片压平误差，不能在此仪器上进行改进. df 及 df_2 可以由 db 及 df 来代替和补偿一部分.

(2) 从公式(28)中可以看出:

摄影机镜箱内本身存在的主点位置误差，对横座标误差的影响，在立体测图仪上当 $X=0$ 时也不能消除，因左方象片主点位置误差是随着 Y 的增大而增大的. 所以测定镜箱主点位置，在立体自动测图仪上作好主点位置校正及小心安置底片框标位置，特别有重要的意义.

底片与 z 轴的倾斜误差 $d\gamma'_z$，$d\gamma''_z$，当左右摄影主光轴同高时，对位于主水平线上的点（$z=0$ 时）的横座标沒有影响.

底片与 x 轴的倾斜误差 $d\gamma_x$，可以利用 $d\varphi'$ 及 $d\varphi''$ 替代一部分。底片本身的旋转误差 $d\kappa'$ 及 $d\kappa''$ 在左右二摄站同高及 $x=0$ 时可以消除。

$d\omega'$ 和 $d\omega''$ 在 $Z=0$ 时(左右二摄影站同高)，对横座标沒有影响。

(3) 从公式(29)中可以看出：

摄影镜箱本身存在的主点位置误差，一般是方向相同、大小相等，因此对高程误差 dZ 沒有影响。但是如果左象片主点本身存在着误差 dx_0'，则必须考虑。所以在立体自动测图仪上对左象片主点的上下校正时也必须注意。

摄影镜箱本身存在的主距误差，当 $df'=df''$ 时，则对 dZ 将沒有影响。

元素 $d\gamma_x'$, $d\gamma_x''$, $d\gamma_z'$, $d\gamma_z''$, $d\varphi'$, $d\varphi''$, $d\kappa'$, $d\kappa''$, $d\omega'$ 和 $d\omega''$，在 $Z=0$，亦即被安置在摄影主光轴的平面内时(左右二摄影站同高时)，对高程误差 dZ 沒有影响，或是消去大部分误差(只存 $d\omega'$ 及 $d\kappa'$ 很少的误差影响)。

$d\gamma_x'$, $d\gamma_x''$ 可以用 $d\varphi'$ 及 $d\varphi''$ 补偿一部分，$d\kappa_z$, $d\gamma_z''$，可以用 $d\omega'$ 及 $d\omega''$ 补偿一部分。

高程误差随 X^2 及 Y^2 传布，是最危险的。特别在镜头作上下移动拍摄象对时，消除 $d\varphi'$ 及 $d\varphi''$ 显得更重要。

三、同偏水平摄影的誤差影响

在第一节中已经讨论了正直水平摄影的误差影响，现在来推求同偏水平摄影的误差影响。根据(4)—(6)式，当 $f=200$ 毫米，$x''_{最大}=80$ 毫米，$\varphi=30°$时，$\frac{x''}{f}\sin\varphi=0.20$，与 $\cos\varphi=0.87$ 比较起来，$\frac{x''}{f}\sin\varphi$ 项可以忽略。于是根据公式(7)—(9)可以写成同偏水平摄影的误差公式如下：

$$dY_{偏}=\frac{Y}{B}dB+\frac{Y}{f}df-\frac{Y^2}{Bf}\sec\varphi\,dp, \tag{30}$$

$$dX_{偏}=\frac{X}{B}dB+\frac{Y}{f}dx'-\frac{YX}{Bf}\sec\varphi\,dp, \tag{31}$$

$$dZ_{偏}=\frac{Z}{B}dB+\frac{Y}{f}dz'-\frac{YZ_1}{Bf}\sec\varphi\,dp. \tag{32}$$

因此公式(27)—(29)可以改写成：

$$\left.\begin{aligned} dY_{偏}&=dY\sec\varphi,\\ dX_{偏}&=d(X)_1\sec\varphi+d(X)_2,\\ dZ_{偏}&=d(Z)_1\sec\varphi+d(Z)_2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

由公式(33)可以看出，同偏水平摄影的座标误差公式与正直水平摄影的座标误差公式只差一个 $\sec\varphi$。理论上增加的误差不大。因此在以后各节中只讨论正直摄影公式。

四、正直水平摄影內外方位元素誤差情况及地面检核点标准配置的必要性

在第二节中已经讨论了正直水平摄影內外方位元素对座标值的影响，为了消除一部分內外方位元素的误差影响，正确配置外业检核点的点位，具有很重要的意义。在立体自

动测图仪或立体座标量测仪上扩展摄影三角测量加密控制点时，先选择标准位置点作为过渡点或较高精度的点，而后在象片上的任意位置选取其他过渡点(座标传递点)。

立体自动测图仪上 X, Y 的最小刻划值为 0.1 毫米，估计到 0.01 毫米，如果在制图上根据公式所允许的误差为 0.1 毫米，则放大一倍成图时，在图板上将产生 0.2 毫米的误差。再加上仪器误差以及在制图仪上的传递误差，这样在图板上的误差当然会大于 0.2 毫米。因此，我们根据本文所研究的公式，进一步推求内外方位元素时，必须要考虑坐标误差公式的项数，以及如何提高精度等问题；从而在目前内外方位元素精度尚未能达到要求的情况下，提出合理的测图方案，就成为十分必要。根据我们数年来实践的证明：

1. 在象对内求定二点之间的水平角中误差 $m_\varphi \approx 15''$，而在相邻立体象对上二点之间的水平角中误差则为 $m_\varphi \approx 22''$。

2. 在沒有改正底片压平误差以前测定 f 的误差 m_f，竟相差达 0.1—0.23 毫米，经过改正后测定的 m_f 为 0.033 毫米。底片与框标平面之间在 Z 轴或 Y 轴上的倾斜角，有1′—1′.5 左右的误差。

3. 立体自动测图仪上象点量测的中误差约为 ±0.015 毫米。

4. 在 CK-4 型立体座标量测仪上的读数误差 $m_p = \pm 0.014$ 毫米，$m_x = 0.012$ 毫米，$m_y = 0.012$ 毫米。

根据上述情况，我们进一步分析公式(27)—(29)，在制图仪上保证 $dX = dY = dZ = 0.1$ 毫米条件下，那些内外方位元素可以省略？

设 $dX = dY = dZ = 0.1$ 毫米，$z_1 \approx z_2 = 60$ 毫米，$x_1 = 100$ 毫米，$x_2 = 80$ 毫米，$b = 20$ 毫米，$Y = 400$ 毫米，$f = 200$ 毫米。

表 1

项	1	2	3	4	5	6	7	8	9
dY 方位元素	dp	df	$d\gamma'_\kappa$ $d\gamma''_\kappa$	$d\gamma'_z$ $d\gamma''_z$	$d\varphi'$ $d\varphi''$	$d\omega'$ $d\omega''$	$d\kappa'$ $d\kappa''$	db	df
数 值	0.0025毫米	0.01毫米	4″	1′9″	4″	1′9″	29″	0.005 毫米	0.05 毫米

表 2

项	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dX 方位元素	dp	dx'_0	df'	df''	$d\gamma'_x$	$d\gamma''_x$	$d\gamma'_z$	$d\gamma''_z$	$d\varphi'$	$d\varphi''$	$d\omega'$	$d\omega''$	$d\kappa'$	$d\kappa''$	db	df
数 值	0.01 毫米	0.05 毫米	0.04 毫米	0.2 毫米	2′45″	13′36″	4′35″	22′54″	9″.7	49″	28″	23″	1′9″	5′44″	0.005 毫米	0.05 毫米

表 3

项	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
dZ 方位元素	dp	dz'_0	df'	df''	$d\gamma'_x$	$d\gamma''_x$	$d\gamma'_z$	$d\gamma''_z$	$d\varphi'$	$d\varphi''$	$d\omega'$	$d\omega''$	$d\kappa'$	$d\kappa''$	db
数 值	0.067 毫米	0.05 毫米	0.067 毫米	0.33 毫米	4′36″	22′9″	7′40″	38′	16″	22′9″	7′40″	51″	1′9″	57′7″	0.033 毫米

由表 1—表 3 可以看出，如果在立体自动测图仪上要达到 0.1 的精度，对有些内外方位元素的要求必须很高．例如，dY 公式中 dp, $d\varphi'$, $d\varphi''$, $d\kappa'$, $d\kappa''$, dB 等; dX 公式中的 dp, $d\varphi'$, $d\varphi''$, $d\omega'$, $d\omega''$, dB 等; dZ 公式中的 $d\varphi'$, $d\varphi''$ 等．如果超出表中规定值，均能影响 0.1 毫米的精度．

同时也可以看出，有些内外方位元素已能满足 dX, dY, dZ 的要求，在内外业时，已经保证有足够精度．例如，$\delta p \leqslant 0.02$ 毫米，$df \leqslant 0.25$ 毫米，$d\gamma'_\kappa$, $d\gamma''_\kappa$, $d\gamma'_z$, $d\gamma''_z$, $d\varphi'$, $d\varphi''$, $d\omega'$, $d\omega''$, $d\kappa'$, $d\kappa''$, 可以小于 1′30″以下，$db \leqslant 0.02$ 毫米．因此公式(27)中没有一项可以消去，只有利用象主点附近的检查点或加密点作为起始点，对象片上下的点（较远及较近的）进行比较以缩短距离的方法来减少一些误差．

由表 2 和表 3 可以看出，公式(28)和(29)中可以消去很多项，于是可简化为：

$$\begin{aligned} dX = {} & \frac{XY}{Bf}(dx'_0 - dx''_0) - \frac{X}{Bf}[X_1 df' - X_2 df''] + \frac{X}{BY}[(Y^2 + X_1^2)\, d\varphi' - \\ & - (Y^2 + X_2^2)\, d\varphi''] - \frac{X_1^2 + Y^2}{Y} d\varphi' + \frac{X}{BY}[X_1 Z_1 d\omega' - X_2 Z_2 d\omega''] - \\ & - \frac{X}{B}[Z_1 d\kappa' - Z_2 d\kappa''] + \frac{Y}{B} dB + \frac{Y}{f} df, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} dZ = {} & -\frac{Z_1}{Bf} X_1 df + \frac{Z_1}{BY}[(Y^2 + X_1^2)\, d\varphi' - (Y^2 + X_2^2)\, d\varphi''] + \\ & + \frac{Z_1}{BY}[X_1 Z_1\, d\omega' - X_2 Z_2\, d\omega'']. \end{aligned} \tag{35}$$

同理，同偏水平摄影公式可以写成：

$$\begin{aligned} dX_{同} = {} & \frac{XY}{Bf}(dx'_0 - dx''_0)\sec\varphi - \frac{X}{Bf}[X_1\, df' - X_2\, df'']\sec\varphi + \\ & + \frac{X}{BY}[(Y^2 + X_1^2)\, d\varphi' - (Y^2 + X_2^2) d\varphi'']\sec\varphi + \\ & + \frac{X}{BY}[X_1 Z_1 d\omega' - X_2 Z_2 d\omega'']\sec\varphi - \frac{X}{B}[Z_1 d\kappa' - Z_2 d\kappa'']\sec\varphi + \\ & + \frac{Y^2 + X_1^2}{Y} d\varphi' + \frac{Y}{B} dB + \frac{Y}{f} df, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} dZ_{同} = {} & \frac{Z_1}{BY}[(Y^2 + X_1^2)\, d\varphi' - (Y^2 + X_2^2)\, d\varphi'']\sec\varphi + \\ & + \frac{Z_1}{BY}[X_1 Z_1\, d\omega' - X_2 Z_2\, d\omega'']\sec\varphi - \frac{Z_1}{Bf} X_1\, df. \end{aligned} \tag{37}$$

野外地面检查点或内业加密点选点的标准配置，按图 9，图 10 所示的方法进行．在左摄影站上延长主光轴与地面相交得交点 1，在左主光轴的主垂面内主光轴上下各选取点 3，点 5；在右摄影站上延长主光轴与地面相交得交点 2．在右主光轴的主垂面的主光轴上下各选取点 4，点 6．当然这样配置在野外实际作业时定会遇到困难，但可以允许在纵线附近选取明显地物点．在内业加密时，上列配置的困难较少，如果选取点 3，4，5，6 有困难时，可以舍去一二点，但是主点 1，2，必须要很好的选取．

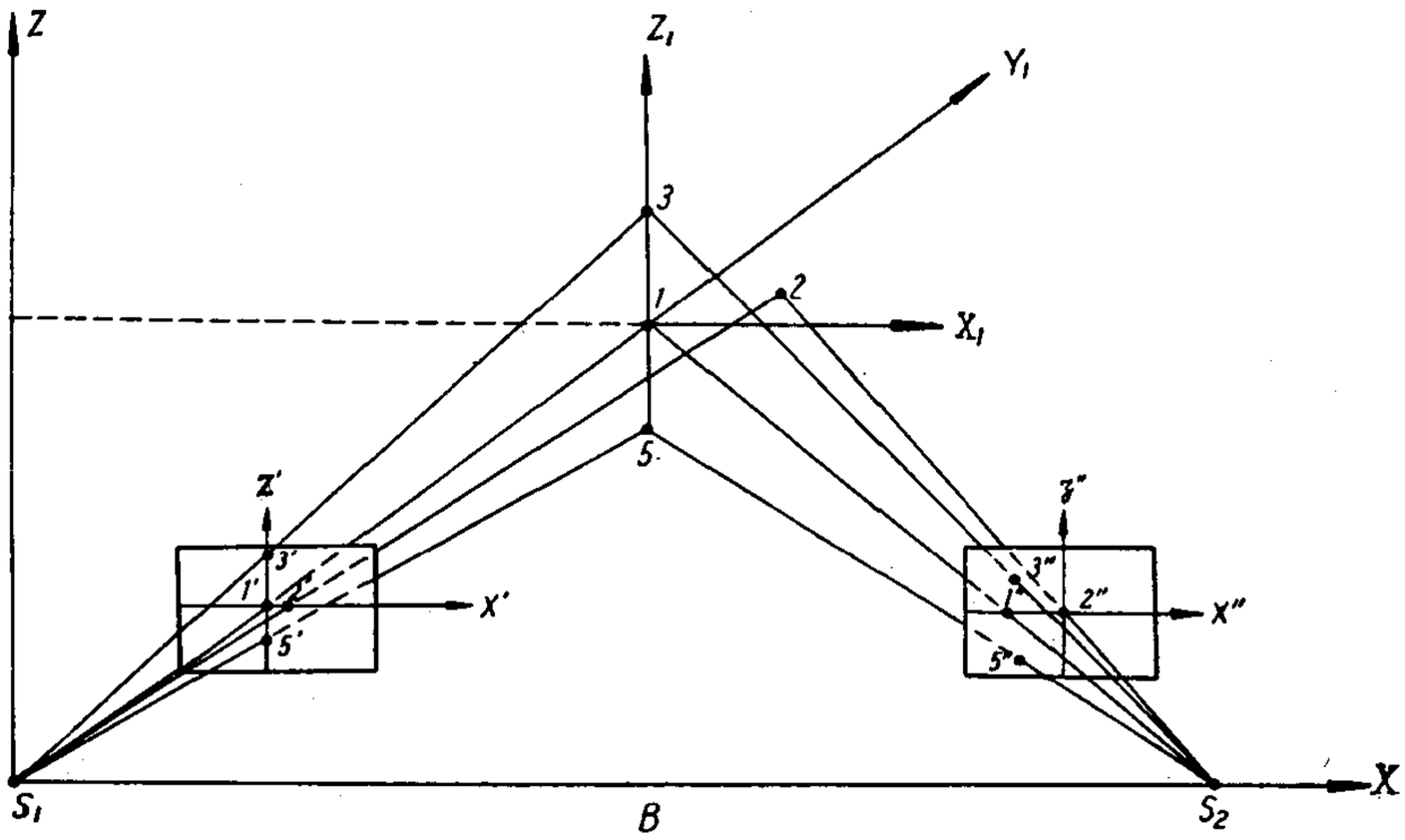


图 9

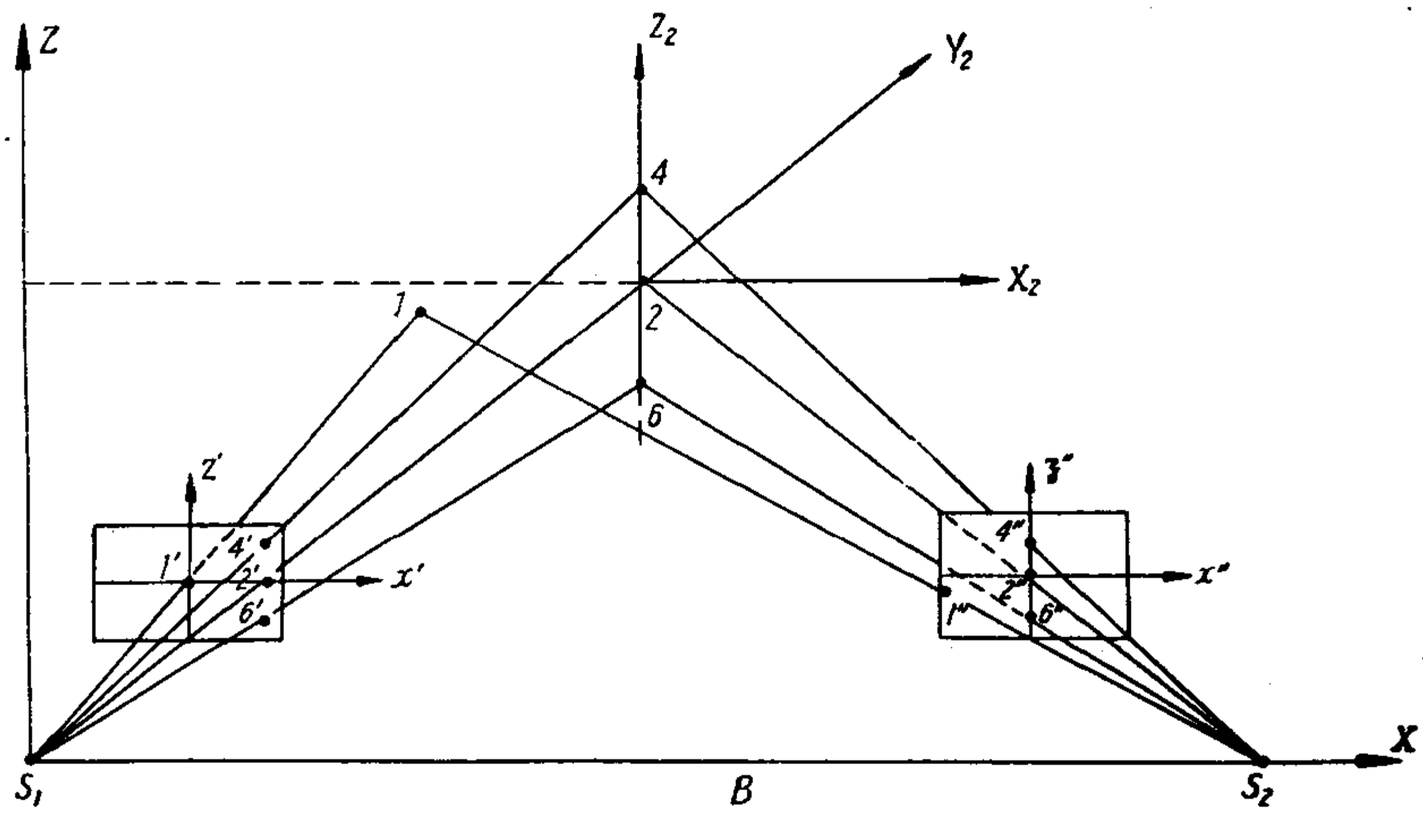


图 10

以标准配置点 1（见图 9）为左象片起始点，与配置点 3,5 进行比较；以标准配置点 2（见图 10）为右象片起始点与配置点 4，6 进行比较．起始点上具有外业测定的检查点，其测定的误差为 δX_1, δY_1, δZ_1; δX_2, δY_2, δZ_2。配置点 3，4，5，6 上有外业测定的检查点，其测定误差为 δX_3, δY_3, δZ_3, δX_4, δY_4, δZ_4, $\cdots$，以此类推．并以 $(dx_0' - dx_0'') \approx \delta p$ 及舍去內外方位元素能够达到要求的数值，于是得下列公式：

$$\left.\begin{aligned}
\delta X_3 &= -\Delta Y_{1,3}\, d\varphi' - \delta X_1,\\
\delta X_5 &= +\Delta Y_{1,5}\, d\varphi' - \delta X_1,\\
\delta X_4 &= +\frac{\Delta Y_{2,4} X}{Bf}\delta p - \left(\frac{Y_4^2 + X_1^2}{Y_4} - \frac{Y_4^2 + X_2^2}{Y_4}\right) d\varphi' - \frac{X}{B}\Delta Z_{2,6}(d\kappa' - d\kappa'') - \delta X_2,\\
\delta X_6 &= -\frac{\Delta Y_{2,6} X}{Bf}\delta p - \left(\frac{Y_6^2 + X_1^2}{Y_6} - \frac{Y_6^2 + X_2^2}{Y_6}\right) d\varphi' - \frac{X}{B}\Delta Z_{2,4}(d\kappa' - d\kappa'') - \delta X_2;
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta Z_3 &= \frac{\Delta Z_{1,3}}{BY_3}[Y_3^2 d\varphi' - (Y_3^2 + X_2^2)\, d\varphi''] - \delta Z_1,\\
\delta Z_5 &= \frac{\Delta Z_{1,5}}{BY_5}[Y_5^2 d\varphi' - (Y_5^2 + X_2^2)\, d\varphi''] - \delta Z_1,\\
\delta Z_4 &= \frac{\Delta Z_{1,4}}{BY_4}[(Y_4^2 + X_1^2) d\varphi' - Y_4^2 d\varphi''] - \frac{\Delta Z_{1,2}}{BY_2}[(Y_2^2+X_1^2) d\varphi' - Y_2^2 d\varphi''] - \delta Z_2,\\
\delta Z_6 &= \frac{\Delta Z_{1,6}}{BY_6}[(Y_6^2 + X_1^2) d\varphi' - Y_6^2 d\varphi''] - \frac{\Delta Z_{1,2}}{BY_2}[(Y_2^2+X_1^2) d\varphi' - Y_2^2 d\varphi''] - \delta Z_2;
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta Y_3 &= \frac{\Delta Y_{1,3}^2}{Bf}\delta p + \frac{\Delta Y_{1,3}}{Bf} X_2 df'' - \frac{\Delta Z_{1,3}}{B} X_2 d\gamma_z'' + \frac{\Delta Y_{1,3}^2}{B}(d\varphi' - d\varphi'') +\\
&\quad + \frac{\Delta Y_{1,3}}{B}\Delta Z_{1,3}(d\kappa'' - d\kappa') - \delta Y_1,\\
\delta Y_5 &= \frac{\Delta Y_{1,5}^2}{Bf}\delta p + \frac{\Delta Y_{1,5}}{Bf} X_2 df'' - \frac{\Delta Z_{1,5}}{B} X_2 d\gamma_z'' + \frac{1}{B}\Delta Y_{1,5}^2(d\varphi' - d\varphi'') +\\
&\quad + \frac{\Delta Y_{1,5}}{B}\Delta Z_{1,5}(d\kappa'' - d\kappa') - \delta Y_1,\\
\delta Y_4 &= \frac{\Delta Y_{2,4}^2}{Bf}\delta p + \frac{\Delta Y_{2,4}}{Bf} X_1 df' - \frac{\Delta Z_{2,4}}{B} X_1 d\gamma_z' + \frac{1}{B}\Delta Y_{2,4}^2(d\varphi' - d\varphi'') +\\
&\quad + \frac{\Delta Y_{2,4}}{B}\Delta Z_{2,4}(d\kappa'' - d\kappa') - \delta Y_2,\\
\delta Y_6 &= \frac{\Delta Y_{2,6}^2}{Bf}\delta p + \frac{\Delta Y_{2,6}}{Bf} X_1 df' - \frac{\Delta Z_{2,6}}{B} X_1 d\gamma_z' + \frac{\Delta Y_{2,6}}{B}(d\varphi' - d\varphi'') +\\
&\quad + \frac{\Delta Y_{2,6}}{B}\Delta Z_{2,6}(d\kappa'' - d\kappa') - \delta Y_2.
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

根据标准配置点与最后公式(38)—(40)可以看出,除 δp, $d\varphi$ 及 $d\kappa$ 的精度对座标误差影响较大外,其它都在仪器的精度范围以内. 为此正确选择外业检查点,严格控制摄影光轴偏差,底片压平和象主点的偏心具有很重要的意义.

根据这样处理好的公式,可以利用来进行解析计算.

我们也可以根据摄影测量及外业检查点的结果、和标准配置点间的相互关系进行图解改正. 经实践证明,图解法要比解析法便利迅速,其改正数符号基本上是和解析法一致的,对高次项的误差也可发现.

按在立体自动测图仪上刺出的点, 用透明紙同样透下三张平面位置图. 一张注记 Y 座标误差;一张注记 X 座标误差(也可以在一张紙上用两种颜色注记);一张注记高程座标误差. 根据公式(38)—(40)的主要改正数项分别按主要误差进行等比内插.

五、建立地面立体摄影测量网的方法

在一般地区要求有数十米至数百米的长度来辅设若干摄影站于一条直线上是可能的. 在实际作业中, 根据任务要求和作业条件, 也可采用折线型的导线. 在外业摄影时, 还可在摄影基线上加一、二个摄影站, 以便绘制较近距离的地形图, 这样测图的好处是立体象对的组合比较多, 故可以扩大测图的地区范围. 利用直伸导线方法建立摄影测量网时,由于在一个立体象对内的相邻象对标准配置点均可落在对象内, 故测定精度较高, 有

利于测定象片的內外方位元素，有利于其他加密点的改正计算及减少野外控制点．其实施步骤如下：

（1）按照图 9，图 10 的方案，测定二基线端点上的外业检查点作为基本象对或起始象对．利用解析法或图解法改正座标误差，以作为改正插入象对的加密点之用．

（2）当摄影站的导线为折线型时，必须利用折角作为同偏角值加摄象片．这些连续象对可以根据象主点附近的加密点进行定向，其相邻象对上相应的加密点，可以不必勉強重合，而分别注记并同时刺于图上，或者分别记其座标值，直至最后一个象对根据外业点进行定向好以后再进行改正．

（3）起始象对的象片，可以利用立体座标量测仪精密测定左右象片相应点的各个座标值，而后代入上面所讨论的公式，用解析法计算內外方位元素及其改正数；也可以利用图解改正法，改正加密点的座标误差．

（4）地面摄影象片主点连线附近应该多加密摄影测量点，摄影基线中点尤为重要．这些摄影测量点先与摄影站点一起进行平差计算，而后再推求其他摄影测量点．必要时可以利用改正后的象主点连线附近的点，再进行一次定向，而后再加密．其相邻象对上相应点的不符值，按其中数分配于相应点上．

六、实验工作情况

本实验所探求的目的是：

1. 能否用地面摄影的方法在困难地区进行航测象片连测，用此方法所求得的加密点的实际精度如何？

2. 在外业点较少的情况下建立地面立体摄影测量网的方法及其实际精度．

3. 验证摄影测量內外方位元素对座标的影响．

试验所用的仪器为蔡司 19/1318 型地面摄影机全套外业装备，Theo 010 和 Wild T2 型经纬仪各一套，以及全套摄影处理设备．

试验计有地形测图与航空象片连测及建立直伸导线地面摄影测量网两项．这里只介绍后一种试验．

所谓直伸导线地面立体摄影测量，就是将若干摄影站按預定的基线长度布置在一条直伸的导线上，并进行连续摄影，而后再在下一折线上依同法进行．

我们在湖南湘潭市易家湾镇附近，黑山子的正前方 400—600 米处布设了一条长达 825 米的直伸导线，在导线两端点间利用 Theo 010 型经纬仪的正倒镜进行定线．并按 30—40 米、50—70 米及 100—120 米三种基线长度布设了 14 个摄影站．

为了保证基线长度测定的精度，导线的距离测量是采用蔡司 Theo 010 型经纬仪配合 Bala 2 米横基尺，按视差角导线测量方法往返测定．视差角观测两个测回，其测回差均不大于 2″；高程测量是采用水准测量起闭于同一 III 等点上的环形水准路线测定的，其闭合差小于 0.05 米；大地联测系采用侧交法传递的．

为了保证检查点具有足够的精度，以及保证每个象对中能有 9—12 个检查点，特别是为了保证每张象片的主纵线上均能有三个位置合乎要求的控制点（即在主纵线的远景、近景以及框标联线的交点上各保证有一点），所以特制了大小为 60×40 厘米、70×50 厘米、

80×60 厘米的三种觇牌，按要求将其放在地面上. 虽然由于地面覆盖物的阻碍沒有能全部按要求的位置立好，但实际上除了中间一排均与框标联线交点有偏差外，其余均能基本上满足要求.

为了保证检查点测量具有足够的精度，故特别注意在交会时均尽可能地选用交角较好的测站，并且给内业计算留有选择最佳图形的可能性. 水平角观测则系以 Theo 030 型经纬仪观测两个测回，其测回差均不大于 15″；由两组三角形解得的同一检查点的内业解算结果（共 50 个检查点），其座标差均不大于 0.05 米. 检查点的高程测量也同样是用上述仪器，在三个测站上以三丝读数法取一个测回的高角. 解算证明，由三站求得的同一检查点的高程差之差，也均小于 0.05 米.

本次摄影工作是在 8 月份内进行的. 该地每日平均室内温度保持在 30℃ 左右（沒有条件采用降温措施）. 尽管我们选择了下半夜的时间进行摄影处理，但室内温度仍在28℃左右，因此摄影处理的质量较差，报废率很高，而且可用的象片上的地物层次也不够清晰.

此外，我们所采用的东方红感光片的保存性能很差，因之尽管它的包装上注明的有效期还有一年的时间，实际上均出现了严重的过期现象. 其严重程度除了黑度、反差下降及出现灰雾外，主要是出现了大量的黑色斑点. 而且这样的斑点在许多底片上在每四平方厘米范围内就有 14—16 点之多. 因此也产生了大量的废品. 从上列感光片的失效情况看出，在南方地区遇到雨季及潮湿的气节，也是促使感光片失效的重要原因. 因此凡是遇到这种气节去采购或作业时，必须特别注意，也要求制造厂有很好的防潮包装措施.

立体量测是在蔡司 18×18 型立体座标量测仪上进行的，每一个立体象对，进行两个测回. 观测及计算表格附后.

七、实驗結果及精度情况

1. 为了要求达到第一个实验目的，共进行了七个独立象对的观测计算，并将其结果在不加任何改正数的情况下，与实测检查点作了比较，其误差情况见表 4，就每个立体象对取其中误差的结果见表 5.

由于我们所摄取的象对的重迭区域比较大，故同一检查点有 3 个立体象对、四个立体

表 4a

△X 误差 (米)	0.000 至 0.200	0.201 至 0.400	0.401 至 0.600	0.601 至 0.800	0.801 至 1.000	1.001 至 1.200	1.201 至 1.400	1.400 至 1.600	1.601 至 1.800
点 数	46	21	9	6	6	4	2	1	1
百分比	47.9%	21.8%	9.4%	6.2%	6.2%	4.2%	2.1%	1.1%	1.1%

表 4b

△Y 误差 (米)	0.000 至 0.200	0.201 至 0.400	0.401 至 0.600	0.601 至 0.800	0.801 至 1.000	1.001 至 1.200	1.201 至 1.400	1.401 至 1.600	1.601 至 1.800	1.801 至 2.030
点 数	50	17	14	5	1	3	2	1	1	2
百分比	52.1%	17.7%	14.5%	5.2%	1.1%	3.1%	2.1%	1.1%	1.1%	2.1%

表 4c

△Z 误差（米）	0.00至0.10	0.11至0.20	0.21至0.30	0.31至0.40	0.41至0.50	0.51至0.60	0.61至0.70	0.71至0.80	0.81至0.95
点　数	52	27	9	5	0	0	0	1	1
百分比	54.7%	28.4%	9.4%	5.3%	0	0	0	1.1%	1.1%

表 5

象对	5/6	6/7	7/8	8/9	9/10	10/11	11/12	自5/6至11/12象对取平均数
m_X（米）	±0.296	±0.631	±0.734	±0.136	±0.645	±0.448	±0.234	±0.495米
m_Y（米）	±0.172	±0.370	±0.644	±0.120	±0.925	±0.673	±0.165	±0.525米
m_Z（米）	±0.063	±0.112	±0.204	±0.252	±0.162	±0.158	±0.054	±0.158米

象对，最多的有六个立体象对观测的结果．平均每个检查点由四个立体象对观测的结果取平均数，与实测外业检查点进行比较（不加任何改正数），其最后中误差见表 6．

将表 6 与表 5 结果比较，可知其精度提高了一倍左右．由此看出，在要求高精度测量时，消除內外方位元素的误差，影响到观测的偶然误差，使用不同基线重复摄影，重复观测立体范围內的象点，也能够提高摄影测量点的精度，不一定需要利用实测检查点定向的方法来提高座标精度．

表 6

$m_X = \pm 0.236$ 米
$m_Y = \pm 0.290$ 米
$m_Z = \pm 0.092$ 米

上列方法如非特殊需要，一般在地形测量或者是象片连测中不宜采用，因为它使摄影测量及內业处理增加了很多工作，所以实际意义不很大．

表 7

$m_X = \pm 0.161$ 米
$m_Y = \pm 0.111$ 米
$m_Z = \pm 0.036$ 米

我们又利用每个独立的立体象对，根据标准配置点利用图解改正的方法，把所有的点进行改进，而后把这些点取平均数得到点位中误差（见表 7）．

由此结果说明，经过单一立体象对进行图解改正以后，其精度会显著的增加．

在每个独立象对上，观测检查点的摄影测量座标与大地点比较的结果，列于表 8—表 10中．

由表 8—表 10 可以看出，经过图解改正后（改正系统误差及強制闭合）座标误差值的分布很均匀，这说明了摄影测量最后的加密精度还是很高的．

2. 为了要求达到第二个实验目的，这次试验是根据第五节所提出的方案进行的．传递方法是根据图 11 把 105，205，305 作为起始点，把 111，211，311 作为闭塞的点（在外业均已测出大地座标）．其他中间的所求点为座标传递的点．在立体象对 5/6 上，求得点 105，205，305，106，206，306 的摄影测量地面座标．根据 105，205，305 的大地测量座标，经过附表“座标变换常数的计算”及“大地座标的计算”，把 105，205，305，106，206，306 等摄影测量地面坐标换算成大地座标．106，206，306 的大地座标作为 6/7 象对上大地座

表 8 纵向座标誤差情况

象 对	自摄影站至测点的平均距离(米)	基线与距离之比*	中 误 差
自 5/6 至 11/12 止	$Y_{远}=513$	$\frac{B}{Y}=\frac{1}{15.4}$	±0.648 米
	$Y_{中}=427$	$\frac{B}{Y}=\frac{1}{12.7}$	±0.549 米
	$Y_{近}=236$	$\frac{B}{Y}=\frac{1}{7.0}$	±0.307 米
经过图解改正后所算得的纵向座标中误差*	同 上		±0.110 米
			±0.106 米
			±0.116 米

* 图解中误差由于根据控制点強制改正的结果，已经平均分配了.

表 9 横座标誤差情况

象 对 5/6—11/12	以象主点的大地座标为原点的左右象点的横座标(米)						
	小于 30 米	31—60	60—90	90—120	120—140	150—180	180—200
点 数	19	30	19	6	5	7	4
中误差 m_X (米)	±0.240	±0.415	±0.376	±0.571	±0.964	±0.975	±0.407
经过图解改正及所算得的横向坐标中误差(米)	±0.216	±0.384	±0.202	±0.371	±0.180	±0.554	

表 10 高程方面誤差情况

象 对 5/6—11/12	以左摄影站象主点为零起算的高程(米)						
	0—10	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80	80米以上
点 数	19	31	3	6	7	5	23
中误差 m_Z (米)	±0.041	±0.112	±0.141	±0.163	±0.202	±0.208	±0.186
经过图解改正后所求得的 m_Z (米)	±0.040	±0.020	±0.030	±0.042	±0.050	±0.040	±0.033

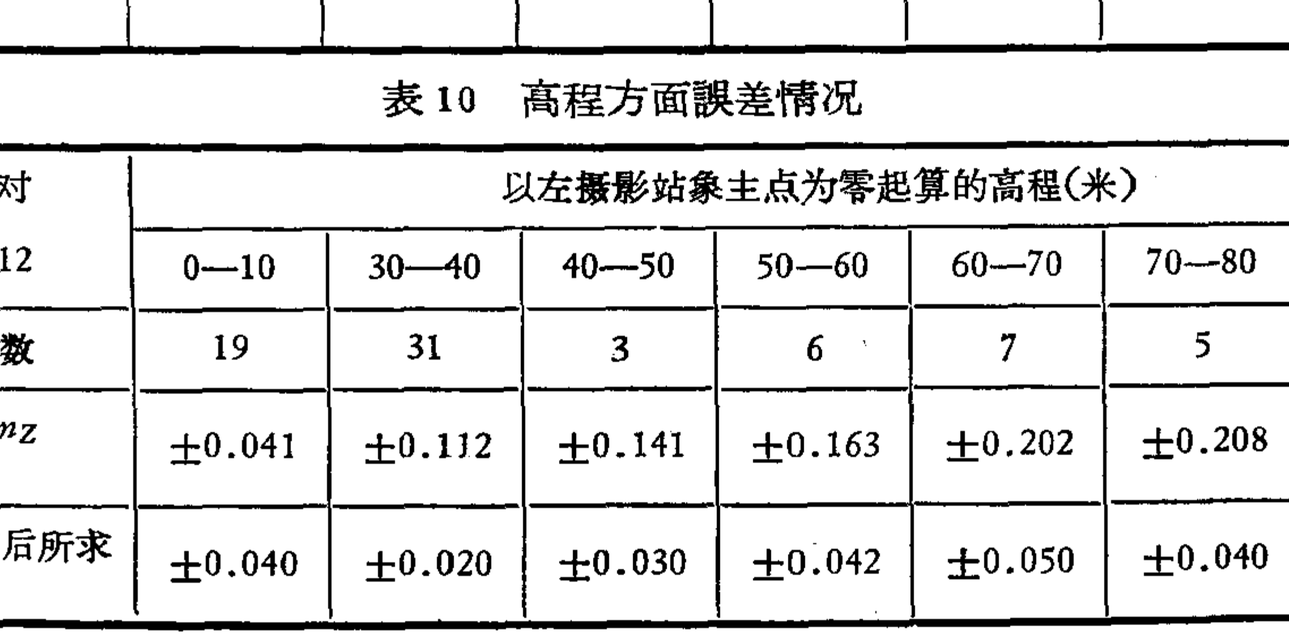


图 11

标的根据．再按附表 3 进行“座标变换常数的计算”,以推求 107, 207, 307 点的大地座标．如是继续往前传递,最后得到 111, 211, 311 的大地座标．将此大地座标值与实测大地座标值比较即得闭合差．其传递方法及座标值的误差，可用图 12 来表示．图中以 C_1 代表第一象对起始点 X, Y, Z 座标值的误差，C_2 代表第二象对的误差．

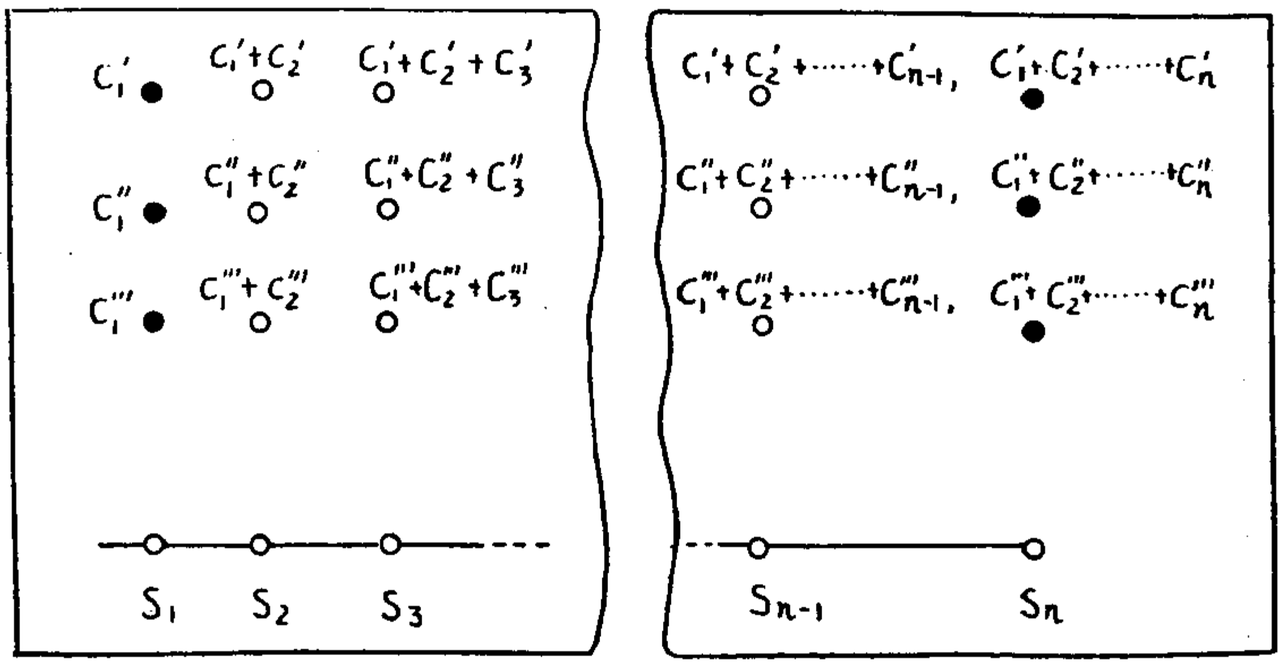


图 12

对某点 i 的座标闭合差可以写成:

$$\left.\begin{aligned} D_{Yi} &= \sum_{i=1}^{n} C_{Yi}, \\ D_{Xi} &= \sum_{i=1}^{n} C_{Zi}, \\ D_{Zi} &= \sum_{i=1}^{n} C_{Zi}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

式中 C_{Yi}, C_{Xi}, C_{Zi} 是公式(38)—(40)中 δY_i, δX_i, δZ_i 座标误差的累积．

由于每个立体象对的内外方位元素的误差影响往往是偶然性的,因此误差积累不大，但有时由于连续的推算的结果,也会出现较小的误差．通过 6 个立体象对的实验,具体说明了经过最后闭合差改正后的中误差情况(见表 11)．

表 11

象对 5/6—10/11	点数	Y 座标中误差(米)		X 座标中误差(米)		备注
		独立象对	连续象对	独立象对	连续象对	
	21	$m_Y = \pm 0.236$	$m_Y = \pm 0.289$	$m_X = \pm 0.215$	$m_X = \pm 0.381$	均为标准配置点

从表 11 中所列的中误差可以看出,在直伸导线上按照以连续象对建立地面立体摄影测量网的方法,所求得的内外方位元素的误差积累是不显著的,因此在立体象对很少时可以将它作为偶然性误差来处理．但是必须指出，我们所进行的上列实验只局限于标准配置的情况,如果在实际作业中,基线还须拉长,所选择的加密点又偏离标准配置比较远时，则其横座标误差应比表 9 中所列的为大．

3. 为了要求达到第三个实验目的,我们试算了四个立体象对,并根据立体象对算出的

大地座标与实测大地座标的差值，对内外方位元素进行了试算．由试算出的结果看来，虽然个别立体象对的方位元素影响较大，但是其出现是偶然性的．又由前二节中所得的实验成果的情况可以看出，虽然内外方位元素也存在一些问题，但由于其出现也是偶然性的，因此如应用重复摄影及测定方法，即可以提高精度．

八、初步意見

1. 在地面立体摄影测量中，由于内外方位元素的影响所带来的误差，在实验中曾利用构成立体象对的测量情况进行了分析与研究．结果表明，不同结构的摄影测量仪器可能带来不同的误差，可以根据上述的误差理论具体地对它进行分析与改正．

2. 经过对单一立体象对图解改正，也就是说主要经过底片压平改正及方位元素改正后，其精度会显著的提高，能使座标误差的分布很均匀．

3. 在高精度测量时，例如象片连测、工程测量及精密地形测量等，消除内外方位元素的系统误差、偶然误差及观测误差，采用不同基线、不同方位的重复摄影及不同组合立体象对的观测方法，均能提高摄影测量点位的精度；如单纯利用少数实测检查点来定向，则不能提高精度．

4. 在有些人员到达比较困难或不易到达（而能设立摄影站）的测量地区，按照在直伸导线上以连续象对建立摄影测量网的方法，所求得的内外方位元素的误差积累是不显著的，因此在立体象对很少时，可以作为偶然误差来处理．但当所选择的象点在象片边缘时，还必须考虑系统误差．在摄影测量处理中，可以采用各种不同立体象对的观测值来抵消其误差．在导线上有折角时，应考虑立体象对的重迭以及建立摄影测量网的方法，一般应该采用三次以上的重迭观测点作为过渡点．

5. 在精密地面摄影测量时，例如矿山测量、土工测量、建筑施工测量等，采用固定的觇板、或在地面上作标志、或用上面所提的方案进行摄影都是提高立体观测精度的最有效的办法．

6. 若按本法则进行摄影测量加密，不测定基线或者粗略估计一下也可以．借助于座标变换，不仅可以实现方位角传递，也可以实现比例尺传递．

参 考 文 献

[1] Hallert, B., Determination of the Accuracy of Terrestrial Stereophotogrammetric Procedures, *Photogrammetric Engeneering*, vol. 21, No. 1, 1955.

[2] Finsterwalder, R., Photogrammetrie, Berlin, 1952.

[3] 张海根等，地面立体摄影测量试验报告，测绘学报，第五卷，第四期，1962．

附表1. 地攝立体座标观测計算手簿

測区 易家湾镇　　主距 $f_k = 193.69$ 毫米　　$M_{Ox} = 80.067$ 毫米　　观测者 余冠英

象对 6/7　　基线 $B = 29.444$ 米　　$M_{Oz} = 80.000$ 毫米

第 I, II 测回均值　　$M_{OP_x} = 17.693$ 毫米　　日 期 64年10月5日

点（号、名）	观测值 x''（毫米）	$x' = x'' - M_{Ox}$（毫米）	$X = k_i x'$（米）	观测值 z''（毫米）	$z' = z'' - M_{Oz}$（毫米）	$Z = k_i z'$（米）	观测值 P'_x（毫米）	$P_x = P'_x - M_{OPx}$（毫米）	$Y = k_i f_k$（米）	$k_i = B/P_x$ 米/毫米	框标读数
106	79.918	−0.150	−0.404	105.210	+25.210	68.155	28.590	+10.890	523.640	2.703	$x_{左} = 4.020$ $x_{右} = 166.050$
206	80.130	+0.066	+0.152	98.578	+18.582	42.460	30.575	+12.886	442.576	2.284	$l_{x-x} = 162.030$ $z_{上} = 153.430$
306	80.250	+0.182	+0.172	82.890	+ 2.886	2.715	48.993	+31.300	182.233	0.941	$z_{下} = 39.274$ $l_{z-z} = 114.156$

附表2. 地攝加密点大地高程計算手簿

測区 易家湾　　计算者 余冠英

象对 6/7

第 I, II 测回平均值　　日 期 64年10月5日

摄站（名、号）	直$_6$	直$_6$	直$_6$
测点（名、号）	106	206	306
相对高度±Z	68.155	42.460	2.715
仪器高+(i±0.H.)	1.395	1.395	1.395
曲率及蒙气改正+e	0.02	0.02	0.00
觇标高(−Z.H.)	0	0	0
高差 $h_i = \pm Z + (i \pm 0.H.) + e - Z.H.$	69.57	43.88	4.11
摄影站点大地高程 H_0	31.606	31.606	31.606
加密点大地高程 $H'_i = H_0 + h_i$	101.18	75.49	35.72
加密点的外业实测高程 H_i	101.21	75.56	35.70
误差 $\triangle h = H_i - H'_i$	+0.03	+0.07	−0.02
备注			

附表3. 加密点大地座标計算手簿

測区 易家湾　　计算者： 王庆廷

象对 6/7　　日 期： 64年10月10日

$X_0 = 3093\,905.271$　　$Y_0 = 403\,623.884$

$a_{平均} = -0.778413$　　$b_{平均} = 0.630082$

测点(名、号)	$a_{平均} Y_i$	$b_{平均} Y_i$
	$-b_{平均} X_i$	$a_{平均} X_i$
	X_0	Y_0
	$X_i = X_0 + a_{平均} Y_i - b_{平均} X_i$	$Y_i = Y_0 + b_{平均} Y_i + a_{平均} X_i$
106	−407.608	+329.936
	+0.255	+0.314
	905.271	623.884
	3093 497.918	403 954.134
206	−344.512	+278.863
	−0.096	−0.118
	905.271	623.884
	3093 560.663	403 902.629
306	−141.853	+114.822
	−0.108	−0.134
	905.271	623.884
	3093 763.310	403 738.572

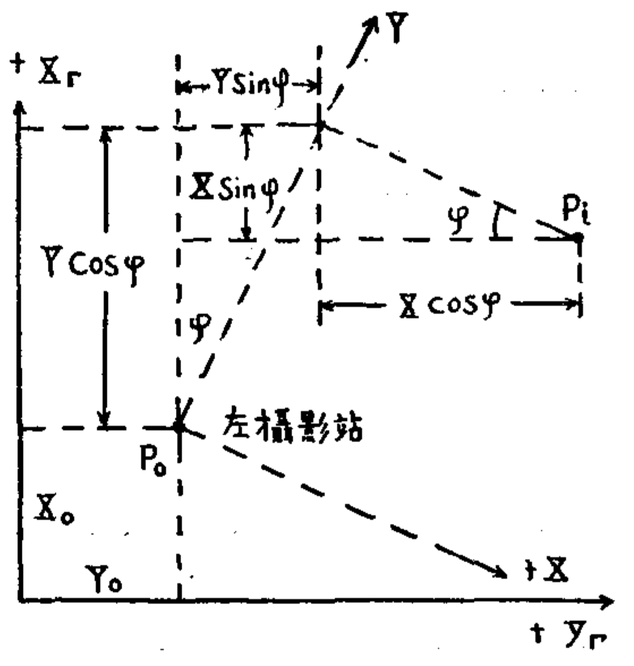
附表 4. 座标变換常数計算手簿

测　区　易家湾　　计算者　王庆廷

象　对　6/7　　日　期　64 年 10 月 10 日

测　点 (名、号)	X_i	Y_i	$X_{\Gamma i}$	$Y_{\Gamma i}$	备　注
1	2	3	4	5	$X_{\Gamma_s}=\frac{[X_{\Gamma i}]}{n}$　$Y_{\Gamma_s}=\frac{[Y_{\Gamma i}]}{n}$
106	−0.404	523.640	3093 498.083	403 954.000	$X_s=\frac{[X_i]}{n}$　$Y_s=\frac{[Y_i]}{n}$
206	+0.152	442.582	3093 560.552	403 902.720	$X'=X_i-X_s$　$Y'=Y_i-Y_s$
306	+0.172	182.233	3093 763.255	403 738.616	$X'_\Gamma=X_{\Gamma i}-X_{\Gamma_s}$　$Y'_\Gamma=Y_{\Gamma i}-Y_{\Gamma_s}$
[···]	−0.080	1148.455	9280 821.890	1211 595.336	$a_i=\frac{Y'X'_\Gamma+X'Y'_\Gamma}{Y'^2+X'^2}=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$
$\frac{[\cdots]}{n}$	−0.027	382.818	3093 607.297	403 865.112	$b_i=\frac{Y'Y'_\Gamma-X'X'_\Gamma}{Y'^2+X'^2}=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}$

测　点 (名、号)	X'	Y'	X'_Γ	Y'_Γ
6	7	8	9	10
106	−0.377	+140.822	−109.214	+88.888
206	+0.179	+59.764	−46.745	+37.608
306	+0.199	−200.585	+155.958	−126.496
$\frac{[\cdots]}{=0}$	+0.001	+0.001	−0.001	0



测　点 (名、号)	X'^2	Y'^2	$X'Y'_\Gamma$	$Y'X'_\Gamma$	$Y'Y'_\Gamma$	$X'X'_\Gamma$	
11	12	13	14	15	16	17	
106	0.1421	19830.8357	−33.5108	−15379.7339	12517.3859	+41.1737	
206	0.0320	3573.7357	6.7318	−2793.6682	2274.6045	−8.3674	
306	0.0396	40234.3422	−25.2990	−31282.8354	25373.2002	+31.1914	
测　点 (名、号)	II=(14)+(15)	I=(12)+(13)	III=(16)−(17)	$a_i=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$	$b_i=\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{I}}$	$a_{平均}$	$b_{平均}$
18	19	20	21	22	23	24	25
106	−15413.2447	19830.9778	12476.2122	−0.777231	0.629127		
206	−2786.9364	3573.7677	2255.9719	−0.779919	0.631259	−0.778413	0.630082
306	−31308.1344	40234.3818	25342.0088	−0.778144	0.629860		

X_{Γ_s}	$-a_{平均}Y_s$	$+b_{平均}X_s$	X_0
3093 607.297	+297.991	−0.0170	3093 905.271
Y_{Γ_s}	$-b_{平均}Y_s$	$-a_{平均}X_s$	Y_0
403 865.112	−241.207	−0.0210	403 623.884

测量与地球物理集刊
第 二 号

在 CM-4 上利用无綫电测高仪記录求航高的改进方法*

唐 炳 燮

一

在苏联采用的利用无线电测高仪记录求航高的方法中，消除由于象片倾斜角和航高差所产生的左右视差的误差这项工作，是利用精密立体量测仪 CM-4 上的校正装置完成的. 因而使所确定的航高增加了四个误差：校正机械沒有考虑到的由高差引起的二阶小值的误差，倾斜象片所引起的影象点平面位移误差，仪器上定向元素安置误差和校正装置的机械误差，以及由于沒有用左测标安放在象底点和最近点上的校正误差. 求山区的航高时，为了消除第一个主要误差，Н. П. Кожевников 曾建议[1]用

$$\delta_P = \frac{2}{f}(x-b)\Delta P\alpha_{x_\Pi} - \frac{y}{f}\Delta P\alpha_{y_\Pi} + \frac{B_2}{H}\Delta P, \tag{1}$$

计算由于高差所引起的左右视差的改正数，以及用

$$\delta(\Delta D) = \frac{D}{f^2\sqrt{f^2+r^2}}\left[r^2 y\frac{\alpha_{y_\Pi}}{\rho} + x_1^2(2b-x_1)\frac{\alpha_{x_\Pi}}{\rho} - x_1 y^2\frac{\alpha_{x_\Pi}}{\rho} - x_1^2 b_z\right], \tag{2}$$

计算由于影象点的平面位移所引起的确定航高的改正数. 暂且不谈这两个公式的正确性与严密性，我们只觉得这个方法太繁了，既要计算精密立体量测仪校正装置的安置值，又要用计算尺计算改正数. 本文建议完全应用计算尺计算左右视差的改正数，以达到简化测定航高的方法.

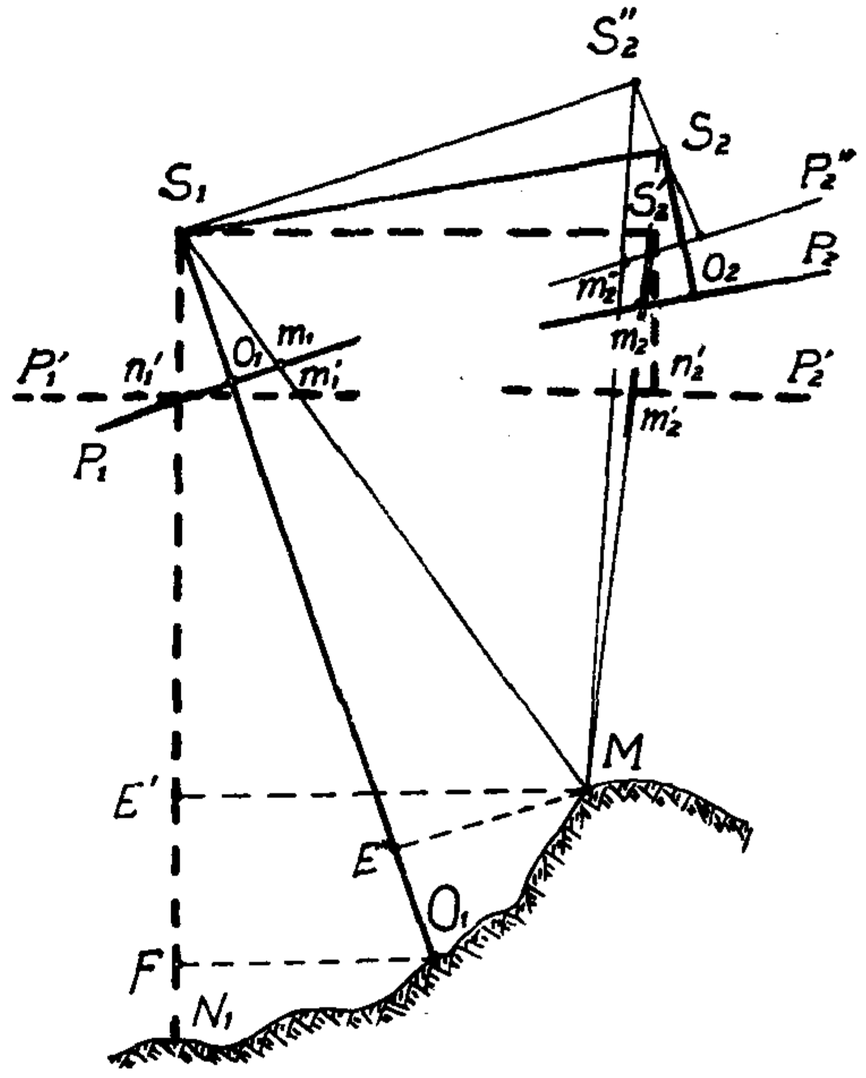


图 1

从图 1 可以看到，将具有倾斜角和航高差的航空象片 P_1, P_2 转换成理想的摄影象对，可以通过两种方法来实现：利用外方位元素将左右航空象片 P_1，P_2 同时旋转和位

* 本文承张海根先生指导，王之卓教授提供宝贵的意见，林开愚同志给了许多具体帮助，谨在此表示深切的谢意.

移成具有同一高度的水平象片 P'_1, P'_2，此时我们有可能求得左摄站对于左地底点的航高 $H_{n_1} = SN_1$；或者利用相对定向元素将右象片和摄影基线进行变换，造成对于左象片的假理想的摄影情况，此时我们可以求出左摄站到左地主点的斜高 $H_1 = S_1O_1$，以后根据左象片的外方位元素算出左摄站对于左地主点的航高 $H_{o_1} = S_1F$。

二

环绕 S_1 将左象片 P_1 旋转到 P'_1 水平位置上，首先使 S_2 在铅垂线上移动 ΔH 值至 S'_2 的位置，然后将右象片 P_2 旋转至 P'_2 水平位置，这样我们就得到了理想的象对 $P'_1P'_2$。因通过左摄站与水平象片 P'_1 的垂直线与铅垂线 S_1N_1 重合，所以在量测前应在象片上根据外方位元素和航摄仪焦距刺出象底点，然后在精密立体量测仪 CM-4 上根据象底点将象片定向，用立体球网量测最近点 M 与底点 N_1 之间的左右视差较，以及读出左测标照准最近点 M 和底点 N_1 时的 x, y, r 值。

由于航空象片具有倾斜角和航高差的缘故，在根据航空象片恢复的立体模型上地面点 M 便形变到 M' 点的位置，所以在确定航高时需要加入一改正数 $\delta(D)$（图 2）。从图 2 可以看到，改正数 $\delta(D)$ 是由于下面二个误差产生的：1)在左象片上影象点由于象片倾斜角所产生的位移 Δr；2）根据航空象片量测的左右视差较 $\Delta P'_m$ 与在水平象片上的左右视差较 ΔP_m 之间存在一差数 $\delta(\Delta P_m)$。

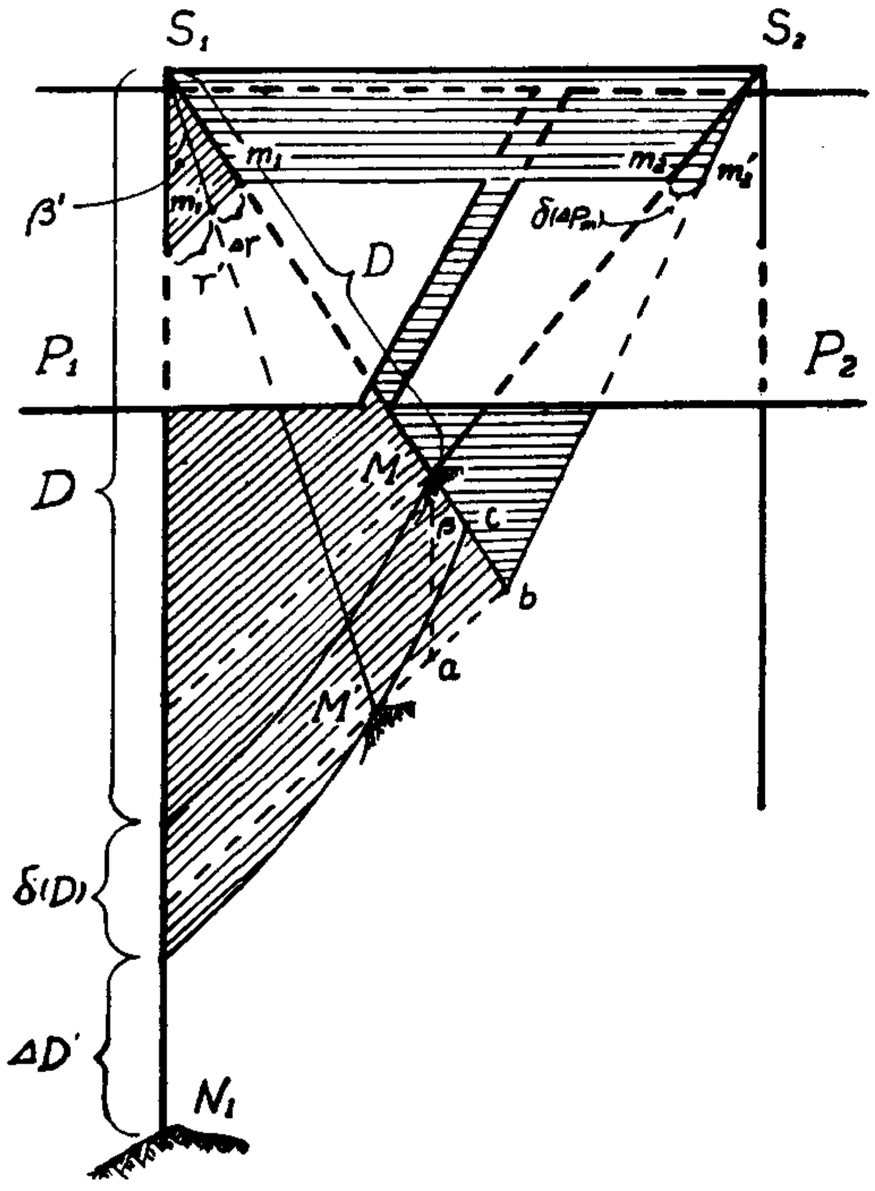


图 2

$$\delta(D) = MC = b_M - b_C,$$

因

$$Mb = \frac{Ma}{\cos\beta} = \frac{\delta(h)}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{D\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot P'_m}\delta(\Delta P_m) = \frac{D}{P'_m}\delta(\Delta P_m),$$

$$bc \approx M'b\cdot\sin\beta = \frac{D+\delta(D)}{f}\Delta r\cdot\sin\beta \approx$$

$$\approx \frac{D\cdot r}{f^2}\Delta r,$$

故

$$\delta(D) = D\left(\frac{\delta(\Delta P_m)}{P'_m} - \frac{r\cdot\Delta r}{f^2}\right).$$

现在我们可以根据图 2 写出求航高的方程式：

$$H_{n_1} = S_1N_1 = D + \delta(D) + \Delta D' = D + D\left(\frac{\delta(\Delta P_m)}{P'_m} - \frac{r\cdot\Delta r}{f^2}\right) +$$

$$+ \frac{(D+\delta(D))}{b_{II}}\Delta P'_c.$$

在上式中再加入立体球网的 $b_0 \fallingdotseq P'_c$, $f_0 \fallingdotseq f$ 的改正数[2]后得：

$$H_{n_1} = D + D\left[\frac{\delta(\Delta P_m)}{P'_m} - \frac{r\cdot\Delta r}{f^2}\right] + \frac{D+\delta(D)}{b_{\text{п}}}\left[\Delta P'_c + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) + \right.$$
$$\left. + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right].$$

在不影响精度的条件下，上式可简化为：

$$H_{n_1} = D + \frac{D}{b_{\text{п}}}\left[\Delta P'_c + \delta(\Delta P_m) - \frac{b_{\text{п}}\cdot r\Delta r}{f^2} + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) + \right.$$
$$\left. + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right]. \tag{3}$$

在计算航高以前，我们必须求得在水平象片上的 ΔP_m，$b_{\text{п}}$，r 与量测值 $\Delta P'_m$，$b'_{\text{п}}$，r' 之间的关系式.

设 x_1，y_1；x_2，y_2 分别为 M 点在傾斜象片 P_1，P_2 上的坐标，x_{1t}，x_{2t} 分别为左右水平象片 P'_1，P'_2 上的横坐标，φ_1，ω_1；φ_2，ω_2 分别为左右航空象片的外方位元素，ΔH 为左右摄站之间垂于水平面的航高差. 根据象底点 n_1，n_2 定向时，水平象片与傾斜象片共轭点坐标之间精确度到 1 阶小值的近似公式为：

$$x_{1t} = x_1 + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1, \tag{4}$$

$$x_{2t} = x_2 + \frac{x_2^2}{f}\varphi_2 + \frac{x_2y_2}{f}\omega_2 + \frac{x_2}{H_m}\Delta H, \tag{5}$$

式中

$$x_2 = x_1 - b'_{\text{п}} - \Delta P'_m,\ b'_{\text{п}} = b'_{\text{л}} - \Delta P'_{n_2}.$$

所以

$$P_m = x_{1t} - x_{2t} = P'_m + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 - \frac{x_2^2}{f}\varphi_2 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1 - \frac{x_2y_2}{f}\omega_2 - \frac{x_2}{H_m}\Delta H. \tag{6}$$

将左象底点 n_1 的象片坐标 $x_1 = y_1 = y_2 = 0$，$x_2 = -b'_{\text{п}}$ 代入上式，得到在水平象片上的右象基线

$$b_{\text{п}} = b'_{\text{п}} - \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}\varphi_2 + \frac{b'_{\text{п}}}{H_{n_1}}\Delta H, \tag{7}$$

在水平象片上的左右视差较

$$\Delta P_m = P_m - b_{\text{п}} = \Delta P'_m + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 + \left(\frac{b'^2_{\text{п}}}{f} - \frac{x_2^2}{f}\right)\varphi_2 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1 -$$
$$- \frac{x_2y_2}{f}\omega_2 - \left(\frac{b'_{\text{п}}}{H_{n_1}} + \frac{x_2}{H_m}\right)\Delta H. \tag{8}$$

又根据水平象片与傾斜象片共轭点坐标之间的关系式：

$$x_{1t} = x_1 + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1,$$

$$y_{1t} = y_1 + \frac{x_1y_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1^2}{f}\omega_1,$$

可以得出在左水平象片上从象底点到最近点的向径距离：

$$r^2 = x_{1t}^2 + y_{1t}^2 = \left(x_1 + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1\right)^2 + \left(y_1 + \frac{x_1y_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1^2}{f}\omega_1\right)^2 =$$

$$= x_1^2\left(1 + \frac{x_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1}{f}\omega_1\right)^2 + y_1^2\left(1 + \frac{x_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1}{f}\omega_1\right)^2 =$$

$$= r'^2\left(1 + \frac{x_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1}{f}\omega_1\right)^2.$$

$$r = r'\left(1 + \frac{x_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1}{f}\omega_1\right) = r' + \Delta r, \tag{9}$$

式中

$$\Delta r = \frac{r'}{f}(x_1\varphi_1 + y_1\omega_1). \tag{10}$$

将(7),(8),(10)式代入(3)式得:

$$H_{n_1} = D + \left\{D\left[\Delta P_c' + \frac{x_1^2}{f}\varphi_1 + \left(\frac{b_{\text{II}}'}{f} - \frac{x_1^2}{f}\right)\varphi_2 + \frac{x_1y_1}{f}\omega_1 - \frac{x_2y_2}{f}\omega_2 - \right.\right.$$

$$- \left(\frac{P_c}{H_{n_1}} + \frac{x_2}{H_m}\right)\Delta H - \frac{b_{\text{II}}' \cdot r^2}{f^2}\left(\frac{x_1}{f}\varphi_1 + \frac{y_1}{f}\omega_1\right) +$$

$$\left.\left. + (P_c' - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right]\right\} \Big/ \left\{b_{\text{II}}' - \frac{b_{\text{II}}'^2}{f}\varphi_2 + \frac{b_{\text{II}}}{H_{n_1}}\Delta H\right\} =$$

$$= D + \frac{D}{b_{\text{II}}'}\left[\Delta P_c' + \left(\frac{x_1^2}{f} - \frac{b_{\text{II}}'r^2 \cdot x_1}{f^3}\right)\varphi_1 + \left(\frac{b_{\text{II}}'P_c'}{f} - \frac{x_2^2}{f}\right)\varphi_2 + \right.$$

$$+ \frac{y_1}{f}\left(x_1 - \frac{b_{\text{II}}' \cdot r^2}{f^2}\right)\omega_1 - \frac{x_2y_2}{f}\omega_2 - \left(\frac{P_c'}{H_{n_1}} + \frac{x_2}{H_m}\right)\Delta H +$$

$$\left. + (P_c' - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right]. \tag{11}$$

求平原地区的航高时，我们可以假定 $P_c' = b_{\text{II}}'$, $H_m = H_{n_1}$, $y_1 = y_2$, $\Delta r = 0$，此时(11)式变为:

$$H_{n_1} = D + \frac{D}{b_{\text{II}}'}\left[\Delta P_c' + \frac{2x_1b_{\text{II}}'}{f}\tau_{\text{II}} - \frac{x_1^2}{f}\Delta\alpha + \frac{yb_{\text{II}}'}{f}\omega_2 - \frac{x_1y}{f}\Delta\omega + \frac{x_1}{H_{n_1}}\Delta H + \right.$$

$$\left. + (P_c' - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right], \tag{11'}$$

式中 $\tau_{\text{II}} = \varphi_2 - \nu'$ 为右象片在象基线相对定向元素系统中的纵向倾角.

上式是利用外方位元素 φ_1, ω_1, φ_2, ω_2, ΔH, τ_{II}, $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$ 根据无线电测高仪记录 D 求航高 H_{n_1} 的公式.

假定根据上式确定航高的误差是由无线电测高仪记录误差 m_D，向径距离误差 m_r，右象片的影象基线量测误差 $m_{b_{\text{II}}}$，左右视差较量测误差 $m_{\Delta P_c}$，确定外方位元素的误差 m_φ 和确定相对元素误差 m_τ 引起的. 设 $b_{\text{II}} = P_m = b$, $x_1 = y = x$, $m_\omega = \frac{m_{\Delta H}}{B} = m_\varphi$, $m_{\tau_{\text{II}}} = m_{\Delta\alpha} = m_{\Delta\omega} = m_\tau$, 从(11)式得:

$$m_{H_{n_1}}^2 = \frac{H^2}{D^2}m_D^2 + \left(\frac{\Delta D}{b}\right)^2 m_{b_{\text{II}}}^2 + \left(\frac{D}{b}\right)^2\left[m_{\Delta P_c}^2 + 2\left(\frac{xb}{f}\right)^2 m_\varphi^2 + \right.$$

$$\left. + \left(4\frac{x^2b^2}{f^2} + 2\frac{x^4}{f^2}\right)m_\tau^2\right] + \left(\frac{Dr}{f^2}\right)^2 m_r^2. \tag{12}$$

为了提高确定航高的精度，应尽量减小上式右边各项所包含的数值．最近距离误差 m_D 是由无线电测高仪记录的原始数据确定的，在摄影测量加工过程中，我们只能设法正确地读取数值 D，但不能超出它固有的精度范围；其余 5 个误差是在摄影测量加工过程中产生的，我们可以在摄影测量精度范围内尽量减少它们在确定航高误差中的比重．

比较无线电测高仪确定的航高和立体摄影测量方法确定的航高的结果，在苏联根据无线电测高仪 PBTД 测定的航高误差为 ± 1.2 米．假定在(12)式中右面最后 3 项容许引起的确定航高误差各为 0.5 米，在 $H = 2000$ 米，$f = 100$ 毫米，$b = 60$ 毫米，$P'_c - b_0 = 7$ 毫米，$x = \frac{\sqrt{2}}{2} r$ 时，对最后 5 个误差容许值的要求分别列在表 1 中．

表 1

$\Delta D =$ $r =$	25 米 5 毫米	50 10	100 20	150 30	200 40
$m_{b_{II}} = \frac{b}{\Delta D} m_H$	±1.20毫米	±0.60	±0.30	±0.20	±0.15
$m_r = \frac{f^2}{D \cdot r} m_H$	±0.50毫米	±0.25	±0.13	±0.09	±0.07
$m_{\Delta P_c} = \frac{b}{D} m_H$	±0.015毫米	±0.015	±0.016	±0.016	±0.017
$m_\varphi = \frac{f}{\sqrt{2}\, xD} m_H$	17′	8′	4′	3′	2.1
$m_\tau = \frac{fb}{D(4x^2b^2 + 2x^4)^{1/2}} m_H$	12′	6′	2.9	1.6	1.3

从上表看出，不论向径距离 r 和改正距离 ΔD 的大小如何，对左右视差量测精度的要求始终是很高的，而且这个要求也随着航高的增大而提高．精密立体量测仪 CM-4 的观测系统放大率为 3.8 倍，量测左右视差的精度为 0.03 毫米，航高大于 2000 米时，左右视差的量测误差就会明显地影响定航高的精度．

对 b_{II}，r，φ 和 τ 所要求的量测精度，是随着地面起伏 ΔD 和向径距离 r 的增大而提高．具体地说，b_{II} 的精度要求随着改正距离 ΔD 的增大而提高．当 $\Delta D > 100$ 米时，我们需要用分划尺读出 X 值，以便满足表 1 的要求．

r 的量测精度也随着 r 和 D 的增大而提高．当 r 增大至 40 毫米时，对 r 所要求的精度增大至 0.07 毫米，这时必须用目估仔细地读到 0.1 个圆圈的精度才能满足要求，否则，估读圆圈数的误差会明显地降低确定航高的精度．从(3)式看到在量测的左右视差较 $\Delta P'_c$ 数值中，需要加入平面位移所引起的改正数 $\frac{D \cdot r \cdot \Delta r}{f^2}$，现在让我们算一下在什么情况下才不需要加入这个改正数．$H = 2000$ 米，$f = 100$ 毫米，$x_1 = y_1$，$\varphi_1 = \omega_1$ 时，改正数 Δr 所产生的确定航高的误差列在表 2 中．

从表 2 可以得出这样的结论：$r < 10$ 毫米时，不论象片倾斜角的大小如何，可以不加入 Δr 所引起的改正数；象片倾斜角小于 1° 时，$r < 20$ 毫米的影象点可以不加入 Δr 所引起的改正数；其余情况都必须加入这一改正数．

表 2

$x=y$ (毫米)	r (毫米)	圆圈数	$\delta H_{(\Delta r)}=\frac{Dr^2}{f^3}(x_1\varphi_1+y_1\omega_1)$ 米				
			$\varphi_1=10'$	$\varphi_1=20'$	$\varphi_1=30'$	$\varphi_1=1°$	$\varphi_1=2°$
3.5	5	4	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
7.1	10	8	0.01	0.02	0.02	0.05	0.10
14.1	20	16	0.07	0.13	0.20	0.39	0.79
21.2	30	24	0.22	0.44	0.67	1.33	2.67
28.3	40	32	0.53	1.05	1.58	3.16	6.32

在摄影基线 $B=1800$ 米时，根据测微高差仪记录确定象片眞倾斜角 φ 的误差是 $4'$. 从表 1 看到，它只能满足当 $r<15$ 毫米时的对外方位元素的精度要求；当 $r>20$ 毫米时，确定象片眞倾斜角的误差就会明显地降低确定航高的精度.

三

倘若在图 1 中我们使左象片保持不动，平行左主光轴 S_1O_1 移动 S_2 至 S_2'' 处，使 S_1S_2'' 平行于左象片；然后旋转右象片 P_2 至平行于左象片 P_1 的位置. 我们改变了摄影基线和右象片的位置和方向，造成一个保持左象片不动的新的假定理想象对.

在精密立体量测仪 CM-4 上根据 O_1O_2 线定向时，在假定理想象对中 $b_{\text{п}}$, ΔP_m, r 的关系式推导如下.

设 $\kappa_{\text{л}}$, v, $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$, $\kappa_{\text{п}}$ 为对于左象片的相对定向元素，根据水平象片与傾斜象片共轭点坐标之间的关系式得:

$$x_{1t}=x_1-y_1\kappa_{\text{л}},$$

$$x_{2t}=x_2+\left(f+\frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha+\frac{x_2y_2}{f}\Delta\omega-y_2\kappa_{\text{п}}+\frac{x_2P'_m}{f}v,$$

$$P_m=x_{1t}-x_{2t}=P'_m-\left(f+\frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha-\frac{x_2y_2}{f}\Delta\omega+y(\kappa_{\text{п}}-\kappa_{\text{л}})-\frac{x_2P'_m}{f}v=$$

$$=P'_m-\left(f+\frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha-\left[\frac{x_2y_2}{f}+\frac{yf}{b'_{\text{л}}b'_{\text{п}}}(b'_{\text{п}}-b'_{\text{л}})\right]\Delta\omega-\frac{x_2P'_m}{f}v. \qquad (13)$$

将 O_1 的象片坐标 $x_1=y_1=y_2=0$, $x_2=-b'_{\text{п}}$ 代入上式得:

$$b_{\text{п}}=b'_{\text{п}}-\left(f+\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}\right)\Delta\alpha+\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}v. \qquad (14)$$

而左右视差较改正数为:

$$\delta\Delta P_m=\left(\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}-\frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha-\left[\frac{x_2y_2}{f}+\frac{y\cdot f}{b'_{\text{л}}b'_{\text{п}}}(b'_{\text{п}}-b'_{\text{л}})\right]\Delta\omega-$$

$$-\left(\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}+\frac{x_2P'_m}{f}\right)v. \qquad (15)$$

因

$$\alpha_{\text{л}}=0, \qquad \omega_{\text{л}}=0,$$

故

$$r = r'. \tag{16}$$

将(14)—(16)式代入(3)式得:

$$H_1 = D + \left[D\left\{\Delta P'_c + \left(\frac{b''^2_{\text{п}}}{f} - \frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha - \left[\frac{x_2y_2}{f} + \frac{y\cdot f}{b'_{\text{л}}b'_{\text{п}}}(b'_{\text{п}} - b'_{\text{л}})\right]\Delta\omega - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{b''^2_{\text{п}}}{f} + \frac{x_2P'_m}{f}\right)v + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right\}\right] \Big/ \left[b'_{\text{п}} - \right.$$
$$\left. - \left(f + \frac{b''^2_{\text{п}}}{f_2}\right)\Delta\alpha + \frac{b''^2_{\text{п}}}{f}v\right]$$
$$= D + \frac{D}{b'_{\text{п}}}\left\{\Delta P'_c + \left(\frac{P'_cb'_{\text{п}}}{f} + \frac{f\Delta P'_c}{b'_{\text{п}}} - \frac{x_2^2}{f}\right)\Delta\alpha - \left[\frac{x_2y_2}{f} + \frac{y\cdot f}{b'_{\text{л}}b'_{\text{п}}}(b'_{\text{п}} - b'_{\text{л}})\right]\Delta\omega - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{b'_{\text{п}}P'_c}{f} + \frac{x_2P'_m}{f}\right)v + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right\}$$
$$= D + \frac{D}{b'_{\text{п}}}\left\{\Delta P'_c - \frac{x_1^2}{f}\Delta\alpha - \frac{x_2y_2}{f}\Delta\omega + \frac{x_1P'_m}{f}(2\Delta\alpha - v) + \Delta P'_c\frac{f}{b'_{\text{п}}}\Delta\alpha - \right.$$
$$- \frac{P'_m}{f}(2\Delta P'_m - \Delta P_c)(\Delta\alpha - v) + \Delta P_{O_2}\frac{y\cdot f}{b^2}\Delta\omega + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) +$$
$$\left. + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right\}. \tag{17}$$

上式是利用相对定向元素 $\Delta\alpha$, $\Delta\omega$, v, 根据无线电测高仪记录 D, 求左摄站到左地主点 O_1 之间斜高的严格公式. 知道左象片的眞倾斜角 φ 后,我们可以根据公式

$$H_{O_1} = H_1\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) \tag{18}$$

计算左摄站到左地主点 O_1 的航高.

求平原地区的航高时,可根据公式

$$H_1 = D + \frac{D}{b'_{\text{п}}}\left[\Delta P'_c - \frac{x_1^2}{f}\Delta\alpha - \frac{x_2y_2}{f}\Delta\omega + \frac{x_1b}{f}(2\Delta\alpha - v) + \right.$$
$$\left. + (P'_c - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right] \tag{17'}$$

计算傾斜航高.

与(12)式相对应,确定航高误差的函数式为:

$$m^2_{H_{O_1}} = \frac{H^2}{D^2}m_D^2 + \left(\frac{\Delta D}{b}\right)^2 m^2_{b_{\text{п}}} + \left(\frac{D}{b}\right)^2\left[m^2_{\Delta P_c} + \frac{x^2}{f^2}(2x_1^2 - 2xb + 5b^2)m_\tau^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{f\cdot r(P_c - b)}{(f^2 + r^2)3/2}\right)^2 m_r^2\right] + \left(\frac{H\varphi}{P_2}\right)^2 m_\varphi^2. \tag{19}$$

同(12)式比较,这里对绝对定向元素的要求是很低的, $\varphi = 2°$ 时 m_φ 的容许值为 $\pm 20'$. 这里对确定相对定向元素精度的要求和在(12)式中的对相定定向元素精度要求基本上相同. 虽然确定相对定向元素的精度要求很高, 但确定相对定向元素的误差为 1′.4, 它不会影响确定航高的精度,所以在本方法中缺少了确定绝对定向元素误差的影响.

从(16)式知道, $r = r'$, 这里根本不存在计算平面改正数的问题, 只是在求立体球网改正数时用到 r, 所以 r 只要估读到 0.5 圆圈的精度就能满足要求了.

确定对于左地主点 O_1 的航高时，不需要在航空象片上刺出象底点 n_1，求航空的计算手续简化一些．从理论上分析，后一种方法所确定的航高的精度也比较高．在仪器上操作时，不需要利用仪器的校正装置，所以在仪器上的操作过程，可以和求相对定向元素的操作同时进行．在实际工作中究竟用哪一种方法，首先根据所确定的航高的用途而定．对这二种方法有选择的余地时，最好确定对于象主点 O_1 的航高．

四

为了在精度上与惯用方法进行比较，下面进行了一个实例解算．

模型象片的已知数据：航摄仪焦距 $f = 100$ 毫米；

摄影外方位元素

象 片	α	ω	κ	B_x	B_y	B_z	H_0	H_1
左	+30′	0	+2°9′49″	0	0	0	3220米	3220.1米
右	−1°	+1°30′	+2°32′46″.5	+2000米	0	0	2780米	2781.8米

标准点 M 的水平象片坐标及航高

$$x_{1t} = +20.516 \text{ 毫米}, \quad x_{2t} = -46.559 \text{ 毫米}, \quad H_m = 2987.74 \text{ 米},$$

$$y_{1t} = +10.767 \text{ 毫米}, \quad y_{2t} = +10.767 \text{ 毫米}, \quad D = 3060.73 \text{ 米};$$

倾斜象片坐标

	左 （毫米）	右 （毫米）
$x_{O_1} =$	0.000	−58.943
$y_{O_1} =$	0.000	0.000
$x_{O_2} =$	+68.951	0.000
$y_{O_2} =$	0.000	0.000
$x_m =$	+20.000	−43.943
$y_m =$	+10.000	+10.002

根据公式

$$\Delta P^\circ = b_0\left(\frac{1}{\cos\beta_0} - 1\right),$$

求得 $b_0 = 50$ 毫米，$f = 100$ 毫米的立体球网在 M 点的左右视差较 $\Delta P^\circ = 1.235$ 毫米．然后根据公式

$$\Delta P'_c = \Delta P'_m - \Delta P^\circ,$$

求得用立体球网瞄准 M 点的左右视差较理论值 $\Delta P'_c = 3.765$ 毫米．将已知数据代入(17)式，得：

$$H_1 = 3060.73 + \frac{3061}{58.94}\left[3.765 + (36.9 - 19.3 + 6.4)\left(\frac{-90}{\rho}\right) - \right.$$

$$\left. - (-4.4 - 2.4)\left(\frac{90}{\rho}\right) - 8.7\left(\frac{-30}{\rho}\right) + 12.7(-0.0241)\right] =$$

$$= 3060.73 + \frac{3061}{58.94}[3.765 - 0.628 + 0.178 + 0.076 - 0.307] =$$

$$= 3060.73 + 160.43 = 3221.16 \text{ 米}.$$

再将上面的H值代入(18)式,得:

$$H_{O_2} = 3221.16\left(1 - \frac{30^2}{2\rho^2}\right) = 3221.03 \text{ 米}.$$

与已知数据 $H_{O_1} = 3220$ 米比较,可以看到按上列具体数据代入本文所介绍的求航高的公式计算,具有公式误差

$$\delta_H = + 1.03 \text{ 米}.$$

因为 $x_1 = + 20.000$ 毫米, $y_1 = +10.000$ 毫米, $\Delta P'_m = +5$ 毫米,我们可以将检验格网看作模拟象片在精密立体量测仪 CM-4 上,根据 O_1O_2 线定向. 用立体球网量测得左右视差较 $\Delta P' = 3.755$ 毫米. 将该值代入(17),(18)式后, 得 $H_{O_2} = 3220.46$ 米, 其绝对误差 $\delta_H = + 0.46$ 米.

根据惯用法解算实例时,为了能正确地得到答案,对 Н. П. Кожевников 所介绍的某些公式[3]进行了正确的改正,否则,解算的结果会大大超过下面得出的误差.

将已知数据代入下列各式:

$$\Delta d = \frac{d_{\text{п}}}{f} b_{\text{п}}(2\Delta\alpha - v) = \frac{-106}{100} 58.9(-180' + 30') = + 2.73 \text{ 毫米},$$

$$\beta = -\frac{d_{\text{п}}}{f}\Delta\alpha = -\frac{106}{100}(90') = + 1°35',$$

$$\rho_0 = \frac{r}{f}\Delta\omega = \frac{150}{100} 90' = + 2°15',$$

$$\kappa_{\text{п}} = -\left(\frac{b_{\text{л}}}{f}\omega_{\text{п}} + \kappa_{\text{п}} - \kappa_{\text{л}}\right) = -\left[\frac{68.9}{100}(90') + 23'\right] = - 1°25',$$

算得精密立体量测仪 CM-4 校正机械安置值. 利用校正机械测得模型点的左右视差较为 4.787 毫米,与理论数值

$$\Delta P_m = \Delta P'_m + \left(\frac{2x_1 b_{\text{п}}}{f} - \frac{x_1^2}{f}\right)\Delta\alpha + (b'_{\text{п}} - x_1)\frac{y}{f}\Delta\omega + y\Delta\kappa - \frac{x_1 b_{\text{п}}}{f} v =$$

$$= 4.782 \text{ 毫米}$$

比较,其量测误差只有 − 0.005 毫米,这意味着校正机械具有很高的工作精度.

根据仪器的 x 轴定向安放立体球网以后,利用立体球网测得左右视差较 $\Delta P_c = 3.590$ 毫米. 将其值代入下式

$$H_1 = D + \frac{D}{b'_{\text{п}}}\left[\Delta P'_c + (\rho'_1 - b_0)(\cos\beta - 1) + b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} - 1\right)\right] =$$

$$= 3060.73 + \frac{3061}{58.9}[3.590 + 12.7(-0.0230)] = 3232.13 \text{ 米}.$$

为了精确地求得航高,必须根据下列公式求得改正数:

$$\delta_P = \frac{2(x - b)}{f}\Delta P \cdot \Delta\alpha + \frac{y}{f}\Delta P \cdot \Delta\omega + \frac{B_2}{H}\Delta P = + 0.101 \text{ 毫米},$$

$$b_{\text{п}} = b'_{\text{п}} - \left(f + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}\right)\Delta\alpha + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f} v = 62.1 \text{ 毫米},$$

$$\delta(\Delta D)=\frac{D}{f^2\sqrt{f^2+r^2}}\left[x_1^2(2b-x_1)\frac{\Delta\alpha}{\rho}-x_1^2b_2\right]=-2.3\text{ 米},$$

此时，得 $H=3224.6$ 米，其眞误差 $\delta_H=+4.6$ 米.

上例很具体地证明了用 Н. П. Кожевников 所介绍的求山区航高的方法，非但手续麻烦，而且精度不高. 正因为这个原因，М. Д. Коншин 曾建议[4]在全能仪上确定航高. 在生产单位中有较多的全能仪时当然可以考虑应用这个方法，但在一般情况下，似乎没有很大的必要用全能仪去测定航高. 本文所介绍的公式，在 $\Delta\alpha=\Delta\omega=|1°30''|$ 的情况下仍能保证 $\delta_H=\frac{H}{3000}$ 的公式精度，它与一般全能仪的工作精度相等. 而在通常条件下摄影的航空象片的倾斜角 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\omega$ 小于 1°，立体座标仪又具有很高的量测精度，所以用它可能全能仪会具有更高的工作精度.

五

与确定二种航高相对应，有二种检查确定航高是否正确的摄影测量公式.

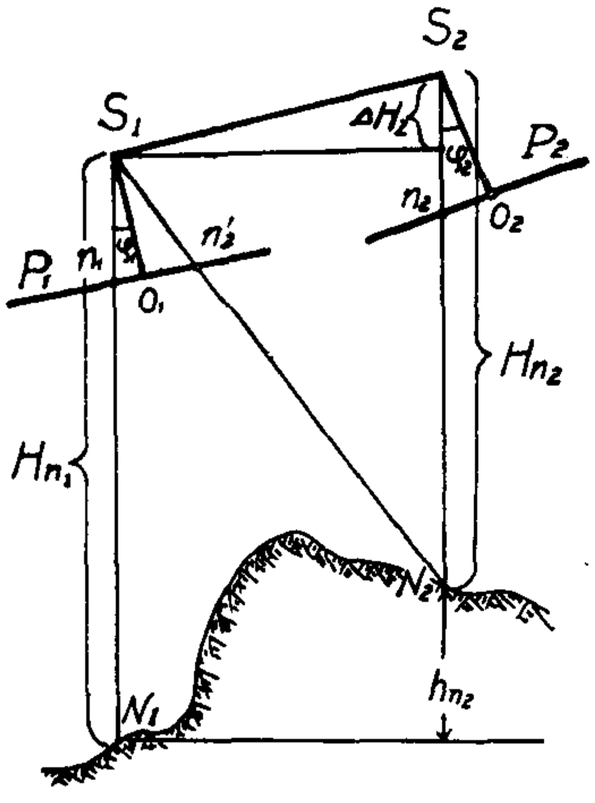


图 3

确定了对于地底点的航高 H_{n_1} 以后，可以用立体摄影测量方法求得两相邻摄站对于地面的航高差(图 3)，

$$H_{n_2}-H_{n_1}=\Delta H_z-h_{n_2}. \tag{20}$$

结合图 2，根据立体摄影测量高差公式得:

$$h_{п_2}=\frac{H_{n_1}}{b_п+\Delta P_{n_2}}\Delta P_{n_2}=\frac{H_{n_1}}{b_л}\Delta P_{n_2}. \tag{21}$$

将 $x_2=y_1=y_2=0$，$x_1=b'_л$ 代入(6)式得:

$$b_л=b'_л+\frac{b'^2_п}{f}\varphi_1. \tag{22}$$

将 $x_2=y_1=y_2=0$，$x_1=b'_л$ 代入(8)式得:

$$\Delta P_{n_2}=\Delta P'_{n_2}+\frac{b'^2_л}{f}\varphi_1+\frac{b'^2_п}{f}\varphi_2-\frac{b'_п}{H_{n_1}}\Delta H, \tag{23}$$

将(22)，(23)式代入(21)式，经不大的改变后得:

$$h_{п_2}=\frac{H_{n_1}}{b'_л}\left(\Delta P'_{n_2}+\frac{b'_л b'_п}{f}\varphi_1+\frac{b'^2_п}{f}\varphi_2-\frac{b'_п}{H_{n_1}}\Delta H\right). \tag{24}$$

我们知道

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\nu'+\tau_л,\\ \varphi_2&=\nu'+\tau_п,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\Delta H_Z=B\sin\nu'\approx\frac{b'_п\cdot H_{n_1}}{f}\nu', \tag{26}$$

式中 ν' 为摄影基线的绝对倾斜角，$\tau_л$，$\tau_п$ 为左右航空象片对于基线系统的相对定向元素.

综合公式(20)，(24)，(25)，可得出下列用来检查确定航高精度的公式:

$$\delta = (H_{n_2} - H_{n_1}) - \left\{\frac{b'_{\text{п}} H_{n_1}}{f} v' - \frac{H_{n_1}}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{n_2} + \frac{b'_{\text{л}} b_{\text{п}}}{f}(v' + \tau_{\text{л}}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}(v + \tau_{\text{п}}) - \frac{b'^2_{\text{п}}}{f} v'\right]\right\}$$
$$= (H_{n_2} - H_{n_1}) + \frac{H_{n_1}}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{n_2} + \frac{b'_{\text{л}} b'_{\text{п}}}{f}\tau_{\text{л}} + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}\tau_{\text{п}}\right]$$
$$= (H_{n_2} - H_{n_1}) - \frac{H_{n_1}}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{n_2} + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}(\tau_{\text{л}} + \tau_{\text{п}}) + \frac{b'_{\text{п}} \Delta P_{n_2}}{f}\tau_{\text{л}}\right]. \quad (27)$$

必须注意，在上面检查确定对于象点的航高公式中只包含相对定向元素，而不包含绝对定向元素，所以它不受高差仪记录精度的影响.

假定不符值 δ 是由于 m_{H_n}, $m_{b_{\text{л}}}$, $m_{\Delta P_n}$, m_τ 产生的，设 $m_{H_{n_1}} = m_{H_{n_2}} = m_H$, $m_{\tau_{\text{л}}} = m_{\tau_{\text{п}}} = m_\tau$, 从(27)式得:

$$m_\delta^2 = 2m_H^2 + \left(\frac{H_{n_2} - H_{n_1}}{b}\right)^2 m_{b_{\text{л}}}^2 + \left(\frac{H}{b}\right)^2 m_{\Delta P_n}^2 + 2\left(\frac{Hb}{f}\right)^2 m_\tau^2. \quad (28)$$

上式的 m_{H_n} 可根据(12)式计算而得. 设 $H = D = 1000$ 米, $\Delta D = 100$ 米, $b = 60$ 毫米, $f = 100$ 毫米, $x = 14.1$ 毫米, $r = 20$ 毫米, $H_{n_2} - H_{n_1} = 100$ 米, $m_D = \pm 0.7$ 米, $m_{b_{\text{л}}} = m_{b_{\text{п}}} = \pm 0.1$ 毫米, $m_{\Delta P_c} = m_{\Delta P_n} = \pm 0.03$ 毫米, $m_\varphi = \pm 4''.0$, $m_\tau = \pm 1''.4$, $m_r = \pm 0.1$ 毫米, $m_{\Delta H} = \pm 1$ 米，代入(12),(28)式得:

$$m_\delta = \pm 1.43 \text{ 米},$$

其余数据相同，航高增至 2000 米时, $m_\delta = \pm 2.20$ 米.

六

确定了从左摄站到地面主点 O_1 的斜高 H 以后，同样可以用立体摄影测量方法检查确定航高的正确性(图 4)，

$$H_2\left(1 - \frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\omega^2}{2\rho^2}\right) - H_1 = B_Z - h_{O_2}, \quad (29)$$

$$h_{O_2} = \frac{H_1}{b_{\text{п}} + \Delta P_{O_2}} \Delta P_{O_2} = \frac{H_1}{b_{\text{л}}} \Delta P_{O_2} \quad (30)$$

将 $x_2 = y_1 = y_2 = 0$, $x_1 = b_{\text{л}}$ 代入(13)式得:

$$b_{\text{л}} = b'_{\text{л}} - f\Delta\alpha, \quad (31)$$

代入(15)式得:

$$\Delta P_{O_2} = \Delta P'_{O_2} + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}\Delta\alpha - \frac{b'^2_{\text{п}}}{f} v. \quad (32)$$

将(31),(32)代入(30)式，稍经改变后得:

$$h_{O_2} = \frac{H_1}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{O_2} + \frac{b'^2_{\text{п}}}{f}(\Delta\alpha - v) + \frac{f\Delta P'_{O_2}}{b_{\text{л}}}\Delta\alpha\right], \quad (33)$$

而

$$B_Z = \frac{b_{\text{п}} \cdot H_1}{f} v. \quad (34)$$

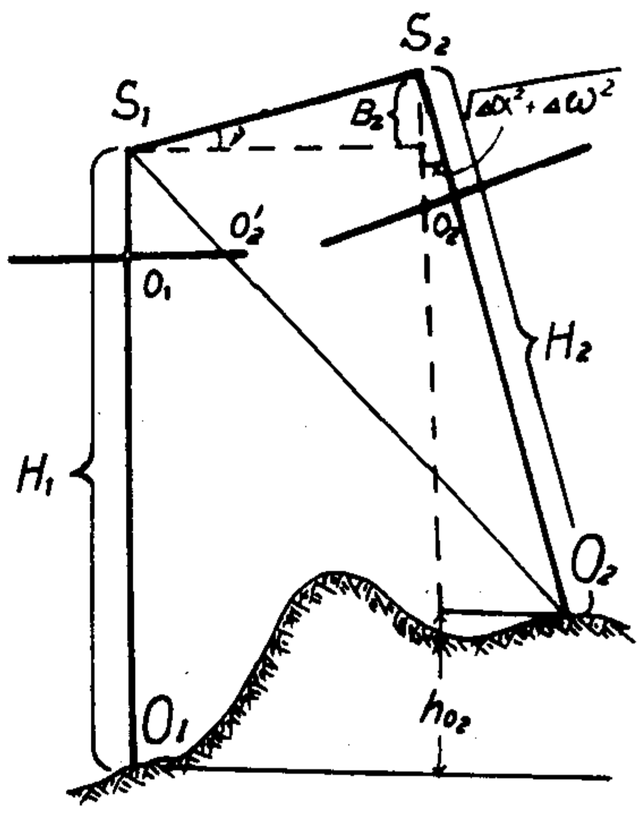


图 4

综合(29),(33),(34)式,得到检查确定航高精度的公式为:

$$\delta = \left[H_2\left(1-\frac{\Delta\alpha^2+\Delta\omega^2}{2\rho^2}\right)-H_1\right]-\left\{\frac{b_{\text{п}}H_1}{f}v-\frac{H_1}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{O_2}+\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}(\Delta\alpha-v)+\frac{f\Delta P'_{O_2}}{b'_{\text{п}}}\Delta\alpha\right]\right\}$$

$$= \left[H_2\left(1-\frac{\Delta\alpha^2+\Delta\omega^2}{2\rho^2}\right)-H_1\right]+\frac{H_1}{b'_{\text{л}}}\left[\Delta P'_{O_2}+\frac{b'^2_{\text{п}}}{f}(\Delta\alpha-2v)+\Delta P_{O_2}\left(\frac{f}{b'_{\text{л}}}\Delta\alpha-\frac{b'_{\text{п}}}{f}v\right)\right]. \quad (35)$$

我们同样假定不符值 δ 是由 m_{HO}, $m_{b_{\text{л}}}$, $m_{\Delta P_0}$, m_τ 产生的. 设 $m_{HO_1}=m_{HO_2}=m_{HO}$, $m_{\Delta\alpha}=m_v=m_\tau$, 从(35)式得:

$$m_\delta^2 = 2m_{HO}^2+\left(\frac{H_{02}-H_{01}}{b}\right)^2 m_{b_{\text{л}}}^2+\left(\frac{H}{b}\right)^2 m_{\Delta P_0}^2+2\left(\frac{Hb}{f}\right)^2 m_\tau^2. \quad (36)$$

将前一页所假定的数据代入(19),(36)式,当 $H=1000$ 米时得:

$$m_\delta = \pm 1.35 \text{ 米};$$

当 $H=2000$ 米时得:

$$m_\delta = \pm 2.00 \text{ 米}.$$

由于相对定向元素比绝对定向元素有更高的精度,所以后一种方法可能出现的不符值比前一种方法可能出现的不符值小些. 具体数字也证明了这一点.

为了将本文所介绍的公式与其它文章所介绍的相应公式进行精度比较,特根据四节所列的已知数据,进行了下面的实例运算.

将已知数据代入(35)式得:

$$\delta = [2780-3220]+\frac{3220}{69.0}\left[10.008+34.7\left(\frac{30}{\rho_1}\right)+\frac{10}{\rho}(-144.90+0.5930)\right]=$$

$$=-440+\frac{3220}{69.0}[10.008-0.303-0.325]=-440+437.73=-2.3 \text{ 米}.$$

若代入文献[5]中第247页所述的公式计算,则

$$\delta = (H_{\text{п}}-H_{\text{л}})+\left[\frac{H_{\text{л}}}{b'_{\text{л}}}\Delta P'_{O_2}+\frac{H_{\text{п}}b'_{\text{л}}}{f_0\rho}(\tau_{\text{л}}+\tau_{\text{п}})\right]=$$

$$=2780-3220+\left[\frac{3220}{69.0}10.008+\frac{3220\cdot 69.0}{1000\rho}(-30)\right]=$$

$$=-440+467.0-19.3=+7.7 \text{ 米}.$$

若代入文献[4]中第32页所介绍的公式计算,则

$$\delta = (H_{\text{п}}-H_{\text{л}})+\left[\frac{H_{\text{л}}}{b'_{\text{л}}}\Delta P'_{O_2}+\frac{H_{\text{л}}b'_{\text{п}}}{f\cdot\rho}(\tau_{\text{л}}+\tau_{\text{п}})-\frac{H_{\text{л}}\cdot\Delta P_{O_2}}{f\cdot P}\tau_{\text{п}}\right]=$$

$$=-440+467.0-16.6-5.6=+4.8 \text{ 米}.$$

具体数字计算证明,本文所介绍的公式的精度比上述两文所介绍的公式精度高,这是因为本文在确定两种类型的航高同时,还用了相应的两种公式来检查所确定的航高的精度的缘故. 虽然公式(27)是与它们属于同一类型的公式,但是在理论上本文所介绍的公式要严格一些.

七

综合前述,现将根据无线电测高仪记录确定对于象主点 O_1 的航高的实际操作方法叙

述如下.

1. 根据无线电测高仪记录软片读出最近距离(详细操作过程见文献[6])

2. 在精密立体量测仪 CM-4 上量测象片

将象片安放在象片盘上，根据 O_1O_2 线将象片定向，然后在已经消去上下视差的主核线上量测 $b_{\text{п}}$ (到 0.1 毫米)和 $\Delta P'_{O_2} = P_{O_2} - P_{O_1}$ (到 0.01 毫米). 再根据规范对确定象片相对定向元素的要求，在标准点位置上量测上下视差 q 和左右视差.

在确定相对定向元素和确定两象主点之间的高差所必需的量测完成以后，不破坏航空象片在仪器上的定向，在左右象片盘上装上安放立体球网板之用的支架，在支架上安放着与航空象片的焦距 f，摄影基线 P'_c 最邻近的立体球网板. 同心圆球网板安放在左象片盘的支架上，偏心圆球网板安放在右支架上；当仪器的测标立体照准左象主点 O_1 时，旋转 X_c, Y_c 螺旋使左右球网板的中心分别与左象主点和在右象片上的左象主点的影象点重合，然后用 κ_c 螺旋分别旋转左右球网板，使球网板的 X 轴与仪器的 X 轴平行.

在球网板根据仪器的 X 轴完成定向以后，首先用左右球网板建立起来的光学立体球网面立体观测左象主点，在左右视差螺旋上读出 P_{CO_1} (到 0.01 毫米)，在分划尺上读出 X_{O_1}, Y_{O_1} (到 0.1 毫米). 然后转动左右视差螺旋，提高光学立体球网面使之与地面模型的某一点相切，而使其余的地面光学模型点处在光学立体球网面之下，再用 X, Y 手輪移动左测标至最近点的位置. 在最近点上用上下视差螺旋消去新出现的上下视差，用左右视差螺旋精确地瞄准最近点 M 后，在左右视差螺旋上读出 P_{CM}，在分划尺上读出 X_M, Y_M，和尽量精确地用目估读出最近点的圆圈数 r'. 此时我们可以根据公式

$$\Delta P'_c = P_{CM} - P_{CO_1},$$

$$x_1 = X_M - X_{O_1},$$

$$y_1 = Y_M - Y_{O_1},$$

算得左右视差较和最近点在左象片上的坐标. 为了计算最近点在右象片上的坐标，我们还需要用测标立体瞄准最近点，在左右视差螺旋上读出 P_M (到 0.01 毫米)，从而算出

$$\Delta P'_m = P_M - P_{O_1}.$$

此时，我们还可以核对左右视差较量测的正确性，计算

$$\Delta P'_c = \Delta P'_m - \Delta P^{\circ},$$

并算出最近点在右象片上的横座标

$$x_2 = x_1 - b'_{\text{п}} - \Delta P'_m,$$

其中 $b'_{\text{п}}$ 可根据前面已经量测的数值算出

$$b'_{\text{п}} = b'_{\text{л}} - \Delta P'_{O_2}.$$

由于光学立体球网面的半径不同于左摄站到最近点之间的距离，根据 Н. П. Кожевников 在文献[1,7]中叙述的原则，应观测其余可能是最近点的影象点. 至于航空象片所恢复的光学立体模型的形变，在计算相对定向元素以前我们是不知道的，因此只能多观测一些可能是最近点的影象点. 在一般情况下，观测 2-3 个这种点是足够了.

上述操作过程在航空象片正、反方向安置(如1—2，2—1)的情况下分别进行两次.

3. 求相对定向元素

在平原地区的航空象片的相对定向元素根据下列公式求得：

$$v = \frac{f}{2yb'_{л}}(q_4 - q_6),$$

$$\Delta\alpha = \frac{f}{2yb'_{л}}(q_5 - q_3 - q_6 + q_4),$$

$$\Delta\omega = \frac{f}{4y^2}(q_5 + q_3 + q_6 + q_4 - 2q_1 - 2q_2).$$

在地形起伏地区，可以根据航空摄影测量内业规范所介绍的计算相对定向元素公式解算相对定向元素，此时

$$v = -\tau_{л},$$

$$\Delta\alpha = \tau_{п} - \tau_{л},$$

$$\Delta\omega = \varepsilon.$$

4. 计算斜高 H_1

在山区利用(17)式计算斜高，式中

$$P'_c = b'_{п} + \Delta P'_c,$$

$$P'_m = b'_{п} + \Delta P'_m.$$

在平原地区则利用(17′)式计算航高。

5. 检查确定航高的正确性

确定航高的正确性的检查，根据(34)式进行。当象片的倾角变化很大时，检查公式中还需加入角度二次项的改正数。

6. 确定外方位元素和计算对于象片点 O_1 的航高

由于对外方位元素要求的精度并不高，所以可以利用在内业加密过程中的任何一种方法确定外方位元素。知道绝对倾斜角 α 以后，可根据(18)式计算对于象主点 O_1 的航高。

求相对定向元素和归化航高的观测计算手簿，应用前面所列的计算数据，列在附录中。

参 考 文 献

[1] Кожевников, Н. П., Определение поправок к показаниям радиовысотомера при съемках горных районов, *Геод. и Картография*, 1962 г. № 11.

[2] 林开愚，关于归化无线电测定航高的两个问题，测绘学报，第七卷，第二期，1964。

[3] Кожевников, Н. П., Определение высот полета по показаниям радиовысотомера, Труды ЦНИИГАиК, вып. 129, 1959г.

[4] Коншин, М. Д., Определение ближайшей точки при обработке аэроснимиков горного района, Труды ЦНИИГАиК, вып. 146, 1962г.

[5] 武汉测绘学院航空摄影测量教研组编，航空摄影测量学，下册，247 页，测绘出版社，1961 年。

[6] Коншин, М. Д., Применяемые методы определения в полете элементов внешнего ориентирования, Труды ЦНИИГАиК, вып. 129, 1959 г.

[7] Кожевников, Н. П., Особенности определения поправок к показаниям радиовысотомера, *Геод. и Картография*, 1963 г. № 3.

附錄.

_____测区 _____航线 _____象对 $f=$ _____毫米 $r=$ _____毫米 $\Delta P=$ _____毫米

$X_{O_2}=$ $P_{O_2}=$ $P_{CM}=$ $P_M=$ $X_M=$ $Y_M=$

$X_{O_1}=$ $P_{O_1}=$ $P_{CO_1}=$ $P_{O_1}=$ $X_{O_1}=$ $Y_{O_1}=$

$b'_{Л}=68.95$ $\Delta P'_{O_2}=+10.008$ $\Delta P'_c=+3.765$ $\Delta P'_m=+5.00$ $X_1=+20.0$ $Y_1=+10.0$

$b'_{П}=b'_{Л}-\Delta P'_{O_2}=58.94$ $P'_c=b'_{П}+\Delta P'_c=62.70$ $P'_m=b'_{П}+\Delta P'_m=63.94$ $X_2=X_1-P'_m=-43.94$

计算相对定向元素:

№ 观测点	Q_i	$q_i=$ Q_i-Q_1	q_5-q_3 q_4-q_6	$q_3+q_5+2q_1$ $q_4+q_6-2q_2$
1				
3				
5				
2				
4				
6				
		$\Sigma_1=$	$\Sigma_2=$	

$$\nu=\frac{f}{2yb'_{Л}}(q_4-q_6)=-30''.0$$

$$\Delta\alpha=\frac{f}{2yb'_{Л}}(q_5-q_3-q_6+q_4)=\frac{f}{2yb'_{Л}}\Sigma_1=-90''.0$$

$$\Delta\omega=\frac{f}{4y^2}(q_5+q_3+q_6+q_4-2q_1-2q_2)=$$

$$=\frac{f}{4y^2}\Sigma_2=+90''.0$$

		计算航高		检查航高		
①	$2\Delta P'_m-\Delta P'_c$	+6.24	$\Delta P'_c$	+3.765	$\Delta P'_{O_2}$	+10.008
②	$\Delta\alpha-\nu$	−60″.0	$-\frac{X_1^2}{f\cdot\rho}\Delta\alpha$	+0.105	$+\frac{b'^2_{П}}{f\cdot\rho}$④	−0.303
③	$2\Delta\alpha-\nu$	−150″.0	$-\frac{X_2Y_2}{f\cdot\rho}\Delta\omega$	+0.115	$+\Delta P'_{O_2}\frac{f}{b'_{Л}\cdot\rho}\Delta\alpha$	−0.380
④	$\Delta\alpha-2\nu$	−30″.0	$+\frac{X_1P'_m}{f\cdot\rho}$⑤	−0.558	$-\Delta P'_{O_2}\frac{b_{П}}{f\cdot\rho}\cdot\nu$	+0.051
⑪	$\Delta\alpha^2+\Delta\omega^2$	+1.6	$-\frac{P'_m}{f\cdot\rho}$①·②	+0.070	$+\frac{b}{\rho^2}\cdot$⑩	+0.030
⑩	⑤+⑦	+0.7	$+\Delta P'_c\cdot\frac{f}{b_{П}\cdot\rho}\Delta\alpha$	−0.167	$+\frac{b^3}{f^2\rho^2}$⑨	−0.004
⑤	$+\frac{\Delta\omega^2}{2\cdot10000}$	+0.4	$-\Delta P'_{O_2}\frac{Y\cdot f}{b^2}\cdot\frac{\Delta\omega}{\rho}$	+0.064	$\Sigma_4=$	+9.402
⑥	$-\frac{\Delta\alpha^2}{10000}$	−0.8	$+(P'_c-b_0)(\cos\beta-1)$	−0.307	$\frac{H_1}{b'_{Л}}\cdot\Sigma_4$	+439.1
⑦	$+\frac{\Delta\alpha\nu}{10000}$	+0.27	$+b_0\left(\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0}-1\right)$	0	$+H_2$	2781.8
⑧	$-\frac{2\nu^2}{10000}$	−0.2	$\Sigma_3=$	+3.087	$-H_2\frac{⑪}{2\cdot\rho^2}$	−1.8
⑨	⑥+3⑦+⑧	−0.2	$\frac{D}{b'_{П}}\cdot\Sigma_3$	+160.3	$-H_1$	−3220.1
			$+D$	3060.73	$\delta=$	−1.0
			$H_1=D+\frac{D}{b'_{П}}\Sigma$	3221.03		

测量与地球物理集刊
第 二 号

利用无綫电定位仪进行定位测量时关于基綫长度测定方法的探討

楊 家 駿

一、无綫电定位测量的几何概念

无线电定位测量就是利用无线电理论中的相位随着接收点位置移动而变化的原理建立的. 中国科学院测量与地球物理研究所和地质部航空物探大队共同试制成功的CWCH-10B 型无线电定位仪就是利用此原理进行工作的.

在实际应用中，地面上安设三个电台(见图 1)，其中一个为主台(B)，其余二个为副台,(A 和 C). 在各副台上接收到的、由主台发出的某一频率的电波，通过变频设备分别将主台频率按 4/3 和 3/4 变化后，再由移动台 P 上的接收机分别接收这三个频率的电波，并进行相位比较. 当移动台从 P 点移至 P' 时,通过仪器上的记录设备，就可自动记录下由 P 点到 P' 的距离差增量,但它并不是以米数表示的,而是由所谓相位周期数表示的. 所谓 P 点到 P' 点的距离差增量,系指$[(R_2' - R_1') - (R_2 - R_1)]$(对于长波道而言)及$[(R_3' - R_2') - (R_3 - R_2)]$(对于短波道而言). 很明显,当 P 点为已知时，P' 点的位置可由二条双曲线相交而得：一条由 $(R_2' - R_1')$ 组成，另一条由 $(R_3' - R_2')$ 组成(因为距二定点的距离差为常数的点的轨迹为双曲线). 因此无线电定位测量就其几何意义而言,是属于双曲线系统的,而每一个"相位周期",就代表着二相邻整数双曲线在基线上所截取的线段长度，对于长波道和短波道各有一个.

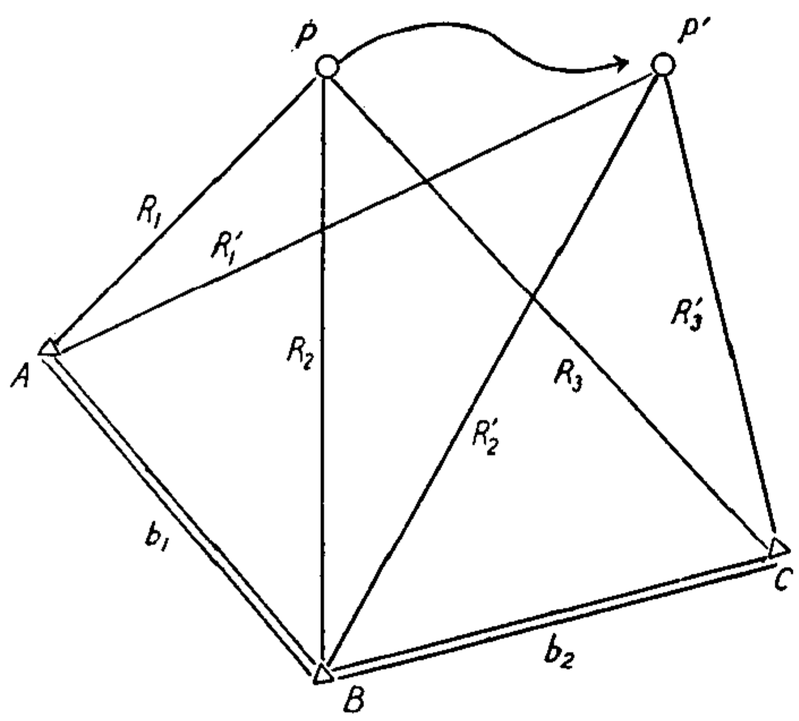


图 1

二、基綫长度测定的意义

无线电定位测量多半应用于人烟稀少和难以通行的沼泽地区,以及近海作业中,一般只要连测三个电台位置和一、二个作为起始点用的控制点,就可控制大约 200 × 200 平方公里面积的测区(视电台的发射功率、基线长度和两条基线的交角而定，前者影响作用距离；后者和测量精度有关). 这和正规的测量作业比起来可以大大减少野外测量时间,迅速测制小比例尺地图. 在军事上或物理探矿事业中,更有其现实意义.

由于无线电定位仪所记录的是相位周期数 $\delta\Delta\varphi$，要从相位周期数化算到距离差增量

$\delta\Delta R$，还必须乘以化算系数K（对于长波道和短波道各有一个），一般称之为线长系数或相位周值，该值有理论公式可以计算．然而由于地区、气象等因素，往往使理论值和实测值不同．因此通过实测二已知点间的相位周期数，以确定该测区的实际线长系数，已成为无线电定位测量中最常用的方法．

为了实测线长系数，经常会增加一些额外的航空摄影和野外测量工作，这给在困难地区测图带来不便．如果采用基线长度测定方法求线长系数，则由于它不需要进行航空摄影，因而对飞行天气无特殊要求，飞行工作日增多，野外工作量减少，作业效率相应提高，这对那些不必进行航空摄影的工作（例如航空物理探矿及海上物理探矿的定位和空中导航等）尤为合适．由于将飞机穿过基线延长线，这一步骤代替了已往必须使飞机精确飞过已知点上空、并进行空中摄影等过程，因而使领航要求降低，内业处理简单．同时，由于在测区内，和基线等长的线段上所通过的等相位线数量都较基线上通过的为少，因而采用此法所获得的线长系数值的精度较高．

三、基綫长度测定的一般概念

在无线电定位测量中，所有等相位线都是以电台为共轭焦点的双曲线，因此在记录上就能够得到任一点相对于起始点的距离差增量．

当载有移动台的飞机从基线一端延长线F上通过的同时，保持记录仪的连续记录，直到飞机飞到另一端延长线G上为止（图2）．根据无线电定位测量的原理就可得到下列公式：

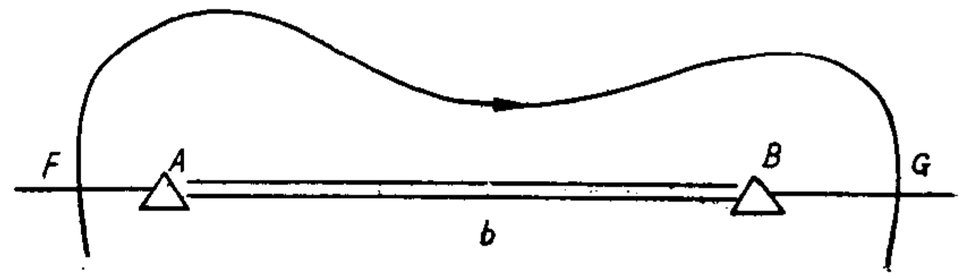


图 2

在F点　$AF - BF = -b$，　(1)

在G点　$AG - BG = +b$．　(2)

从F点到G点的距离差增量为〔(2)式—(1)式〕：

$$(+b) - (-b) = 2b.$$

若从仪器上记录出的相位差增量为$\delta\Delta\varphi$，则

$$b = \frac{\delta\Delta\varphi}{2} \cdot K, \qquad (3)$$

式中K为线长系数，或称相位周值．

由此可见，为了测定基线AB的长度b，只要使飞机经过基线二端延长线，并保持仪器连续工作即可．

四、测定基綫长度时，航高应有的限制

在确定基线长度时，严格地讲，必须正确地通过空间基线的延长线，才能确定出真实的基线长度来．否则，由于实地上的等相位线是以基线为对称轴的双叶双曲面，致使当航高很高时，会引进由于航高的加入而产生的平面位置误差，这项误差将随航高的增大以及在基线延长线上对电台位置的靠近而增加．

通过基线作一垂直平面，割双曲面为双曲线（图3），以基线为X轴，通过基线中点S

作 Y 轴,得直角座标系 XSY。则按平面双曲线的公式不难推得如下关系:

$$Y = \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{b}{2}+X_c\right)^2}{a^2}-1\right]} b\cdot\xi, \tag{4}$$

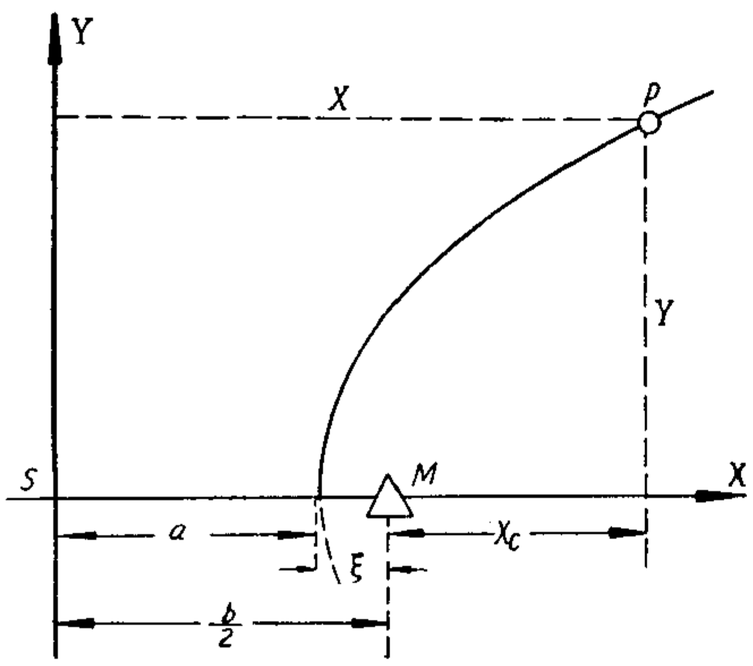


图 3

式中 a 为双曲线顶点离原点 S 的距离, b 为基线长度, X_c 为穿过基线延长线时,飞机距电台的水平距离, Y 为飞行航高, ξ 为允许误差.

如果我们压缩双曲线到相当扁的程度,也即使这条双曲线相当于 0.01 周期的等相位线(即 $\xi = 0.01$ 周期). 这样,只要飞机飞行航高小于 Y 值,则由于航高所引起的测定基线长度的误差将不超过 0.01 周期.

上述概念用数学式表示的话,即为:

$$\xi = \frac{b}{2} - a = 0.01K,$$

式中 K 为线长系数. 如果我们假定两个波道的线长系数值各为:

$K_{短} = 80$ 米/周期, $K_{长} = 100$ 米/周期;

$b_{短} = 124$ 公里, $b_{长} = 168$ 公里;

$\xi_{短} = 0.8$ 米, $\xi_{长} = 1.0$ 米.

并以不同的 X_c 值代入(4)式,得表 1.

表 1

X_c(公里)	5	10	20	30
Y_K(米)	129	186	273	345
$Y_Д$(米)	134	199	293	370

表中 Y_K 和 $Y_Д$ 分别为短基线和长基线延长线上的航高数值,只要航高不超出表 1 规定,而由于航高的影响所带来的平面位置误差将不超过 ξ 值.

将(4)式微分之,并转为中误差:

$$m_Y = \pm\frac{2\xi\cdot X_c^2}{Y}\cdot\frac{1}{b^2}m_b.$$

当 $X_c = 30$ 公里, $\xi \approx 1$ 米, $Y = 370$ 米, $b = 168$ 公里时,

$$m_Y(米) \approx \frac{1}{6}m_b \quad (公里).$$

从上述计算可以看出, b 的误差 m_b 对 m_Y 的影响很小,因此在实际计算中, b 值可在地图上量得. 然后通过公式(4)计算各种实际情况下的航高限制值.

五、基綫一端的零数内插問題

对于装有自记数字计算器的无线电定位仪(例如,苏联 Координатор 的 СПУ 及

Decca 系统的 Decometer)。当飞机通过基线两端延长线时，自记数字计算器的数字将从最小变到最大。最大值和最小值之差的一半即为基线长度。

但在一般情况下，无线电定位仪不附有自记数字计算器(例如苏联的 PΓCLI，我国试制的 CWCH-10B 等)。此时从记录上只能读出整数的相位周期，对于基线两端的零数，在记录紙带上是不能象平时一样用直线內插的，下面就此方法问题进行一些探讨。

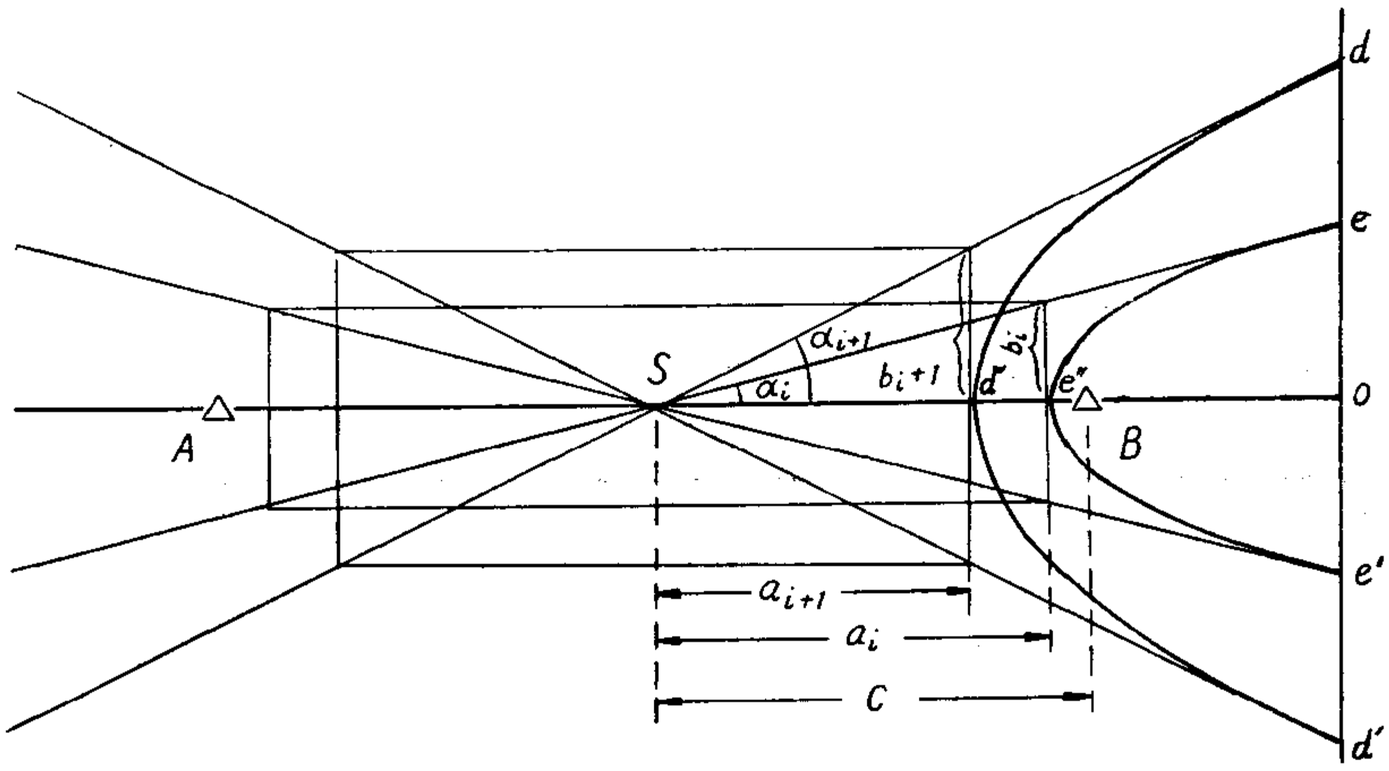


图 4

图 4 中 AB 表示基线，c 为基线长度之半，飞机通过基线延长线时航迹为 dd'，和基线延长线交于 o 点。$e\ e''\ e'$ 为距离基线端点 B 最近的一条整数周期的等相位线（双曲线)，而 $d\ d''\ d'$ 为和 $e\ e''\ e'$ 相差一个整数周期的等相位线(为另一条双曲线)。此二双曲线和飞机航迹各交于 e, e' 和 d, d'。S 为基线中点，Sd, Sd' 和 Se, Se' 各为双曲线 $d\ d''\ d'$ 和 $e\ e''\ e'$ 的渐近线。根据双曲线的定义可得：

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \sqrt{\left(\frac{c}{a_i}\right)^2 - 1}, \tag{5}$$

同理，

$$\operatorname{tg}\alpha_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{c}{a_{i+1}}\right)^2 - 1}. \tag{6}$$

从图 4 中可见，

$$\frac{de}{do} = 1 - \frac{eo}{do}.$$

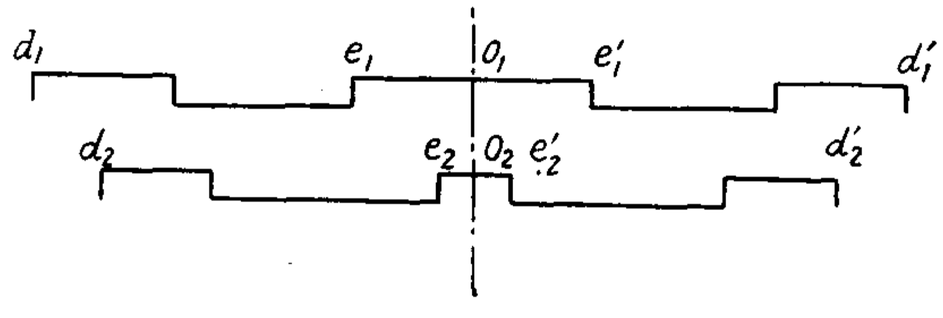
若以 tg α 来表示时可得：

$$\frac{de}{do} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}}. \tag{7}$$

当飞机飞过基线延长线时，如果满足表 1 所提的航高要求，则记录紙带上将得到图 5 所示图形，且其相应的相位周期应和图 4 中的 de, do 等值成比例。亦即

$$\frac{d_1e_1}{d_1o_1} = \frac{d_2e_2}{d_2o_2} = \frac{de}{do} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}}. \tag{8}$$

(8)式指出了紙带上相位周期长度之比和该双曲线的渐近线与横轴交角间的关系。



过基线延长线的瞬间

图 5

实际工作中就可通过这种关系来求得查取基线长度内插零数值的表格.

造表时(参看图 4), 只要先假定 Be'' 等于某一值, 例如从 0.02 周期开始, 并以 0.02 周期为其间距,一直算到 2.00 周期,以计算 tg α 值,由此即可得表2 .

表 2

离电台距离的周期数	a	$\frac{c}{a}$	$\left(\frac{c}{a}\right)^2-1$	tg α*
0.02	61 978.3	1.00001	0.00002	0.0045
0.04	61 977.5	1.00002	0.00004	0.0063
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.48	61 959.9	1.00031	0.00062	0.0249
0.50	61 959.1	1.00032	0.00064	0.0253
0.52	61 958.3	1.00034	0.00068	0.0261
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.98	61 939.9	1.00063	0.00126	0.0355
1.00	61 939.1	1.00064	0.00128	0.0358
1.02	61 938.3	1.00066	0.00132	0.0363
1.04	61 937.5	1.00067	0.00134	0.0366
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.48	61 919.9	1.00096	0.00192	0.0438
1.50	61 919.1	1.00097	0.00194	0.0440
1.52	61 918.3	1.00098	0.00199	0.0446
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.98	61 899.8	1.00128	0.00256	0.0506
2.00	61 899.1	1.00129	0.00258	0.0508

* $\text{tg}\,\alpha=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}$, 设 $c=61979.1$, 1 周期相当于 40.0 米.

从表 2 中取某一个 tg α 值, 设为 tg α_i, 再取一个比 tg α_i 相应的周期数大一个周期的 tg α, 设为 tg α_{i+1}. 将此二值代入(8)式, 就可求得 de/do 值, 设为 f, f 值也可计算出一套表格来(从 0.02 周期到 1.00 周期,见表 3).

在实际应用中, 只要在记录紙带上量取飞机通过基线延长线之前最末一个相位周期的长度 (图 5 中的 d_1e_1 和 d_2e_2) 和该周期加内插零数在内的长度 (图 5 中 d_1o_1 及 d_2o_2), 并求其比值:

$$f_1=\frac{d_1e_1}{d_1o_1} \quad 和 \quad f_2=\frac{d_2e_2}{d_2o_2}.$$

然后就可从表 3 中查出内插相位周期来.

可是飞机通过基线延长线的瞬间(图 4 上 o 点)在记录紙带上是无法确定的,也即 o_1, o_2 点(见图 5)无法定出, 于是 d_1o_1 和 d_2o_2 也就无法量得. 此外,因飞机在通过基线延长线时不可能完全与它垂直, 这样就会造成 do 和 $d'o$ 的距离不等, 因而产生误差. 由于这些

表 3

$\Delta\varphi$	$\frac{de+d'e'}{do+od'}$	$f=1-\frac{ee'}{dd'}$	$\Delta\varphi$	$\frac{de+d'e'}{do+od'}$	$f=1-\frac{ee'}{dd'}$
0.02	$\frac{318}{363}$	0.876	0.52	$\frac{185}{446}$	0.415
0.04	$\frac{303}{306}$	0.828	⋮		
⋮			⋮		
0.48	$\frac{189}{438}$	0.432	0.98	$\frac{151}{506}$	0.298
0.50	$\frac{187}{440}$	0.425	1.00	$\frac{156}{508}$	0.295

情形，我们在量距时可量取：

$$\frac{d_1e_1+d_1'e_1'}{d_1d_1'} \quad 和 \quad \frac{d_2e_2+d_2'e_2'}{d_2d_2'}.$$

通过对表 3 的反查，就可求出相位周期内插的小数. 这样就避免了找不到 o 点的困难，并消除了由于航迹倾斜所引起的大部分误差.

此外，(3)式可以改写为：

$$b=\delta\Delta\varphi\cdot\frac{K}{2}. \tag{9}$$

(9)式可理解为在应用无线电定位仪确定基线长度时，一个相位周期所代表的实地长度为该波道线长系数 K 值之半. 表 2 中所用“一个周期相当的米数”就由此而来.

下面就上述方法[1]的精度讨论三个实际问题.

1. 造表时，c 值和 K 值应具备的精度

表 3 是根据公式(5)—(7)计算的，也即在求基线长度的公式中，却又用到基线值；同时，基线长度的测定，一般都是为了求线长系数 K（文献[1]中就是这样做的）. 而计算表 2 时，也需用到 K 值. 这就提出了这样一个问题：能否可以用近似的 c 值和 K 值来计算表 3？又其近似的程度到底如何？

根据公式(7)，并考虑到(5)、(6)二式，可得：

$$f=1-\frac{\operatorname{tg}\alpha_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}}=1-\sqrt{\frac{\frac{c^2-a_i^2}{a_i^2}}{\frac{c^2-a_{i+1}^2}{a_{i+1}^2}}}.$$

令 $a_i=c-n$，n 为最靠近基线电台的整数等相位线到基线电台的距离，也即内插零数值. 并令 $a_i-a_{i+1}=m$，m 为与一个周期相当的实地长度 $\left(\text{其值等于(9)式中的}\frac{K}{2}\right)$. 则

1) 此法系 1963 年 11 月中国科学院测量与地球物理研究所和地质部航空物探大队进行无线电定位测量空中试验时所提出，试验结果，情况良好.

上式可改写成:

$$f = 1 - \sqrt{\frac{\dfrac{c^2 - (c-n)^2}{(c-n)^2}}{\dfrac{c^2 - (c-n-m)^2}{(c-n-m)^2}}}. \tag{10}$$

由于函数 f 的单调性(这一点从表 3 中可以看出),因而可对三个较特殊的数(0.02 周期, 0.50 周期和 0.98 周期)进行研究,其结果大致也可说明一般的情形.

(1) 设 $n = 0.02\,m$, 使(10)式分别对 c 和 m 求偏导数, 并假定 $c = 62$ 公里, $m = 40$ 米, $f = 0.876$ (由表 3 查得),则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \approx \frac{1}{1.2 \times 10^6},$$

用上面各值代入,可得:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial m}\right| \approx \frac{1}{3.2 \times 10^5}.$$

(2) 设 $n = 0.50\,m$, 同样使(10)式分别对 c 和 m 求偏导数, 并取 $c = 62$ 公里, $m = 40$ 米, $f = 0.425$ (由表 3 查得),则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \approx \frac{1}{1.1 \times 10^7},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial m}\right| \approx \frac{1}{1.4 \times 10^5}.$$

(3) 设 $n = 0.98\,m$, 也使(10)式分别对 c 和 m 求偏导数, 并取 $c = 62$ 公里, $m = 40$ 米, $f = 0.298$ (由表 3 查得),则

$$\left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \approx \frac{1}{1.7 \times 10^7},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial m}\right| \approx \frac{1}{1.2 \times 10^5}.$$

綜合上述三种情形,我们可以假定:

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{1}{10^6}, \qquad \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{1}{10^5}.$$

因为

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) dc + \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right) dm,$$

而从表 3 中可看出,当 $df \leqslant 10^{-3}$ 时, 内插周期数的误差不会超出 0.01 周期. 将已知各值代入上式,即

$$df = \frac{dc}{10^6} + \frac{dm}{10^5} \leqslant 10^{-3},$$

或

$$\frac{dc}{10^3} + \frac{dm}{10^2} \leqslant 1.$$

权衡之下,最后得:

$$\left.\begin{aligned} dc &\leqslant 5 \times 10^2, \\ dm &\leqslant 5 \times 10. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

显然 m 和 c 的误差决不会超过(11)式的规定. 这就是说,在造表 2 和表 3 时,所应用的近似 c 值,可由飞机从基线延长线的一端,飞到另一端时,在记录紙带上所记录的相位周期值 $\delta\Delta\varphi$ 的整数部分求得,而表中所用的 m 值可根据理论 K 值求出.

2. 用渐近线代替双曲线的误差情况

在前面的分析中,都是用渐近线代替双曲线. 这种近似的替代,其误差情况怎样? 在什么条件下? 才允许替代.

根据平面双曲线的理论可得(参见图 6):

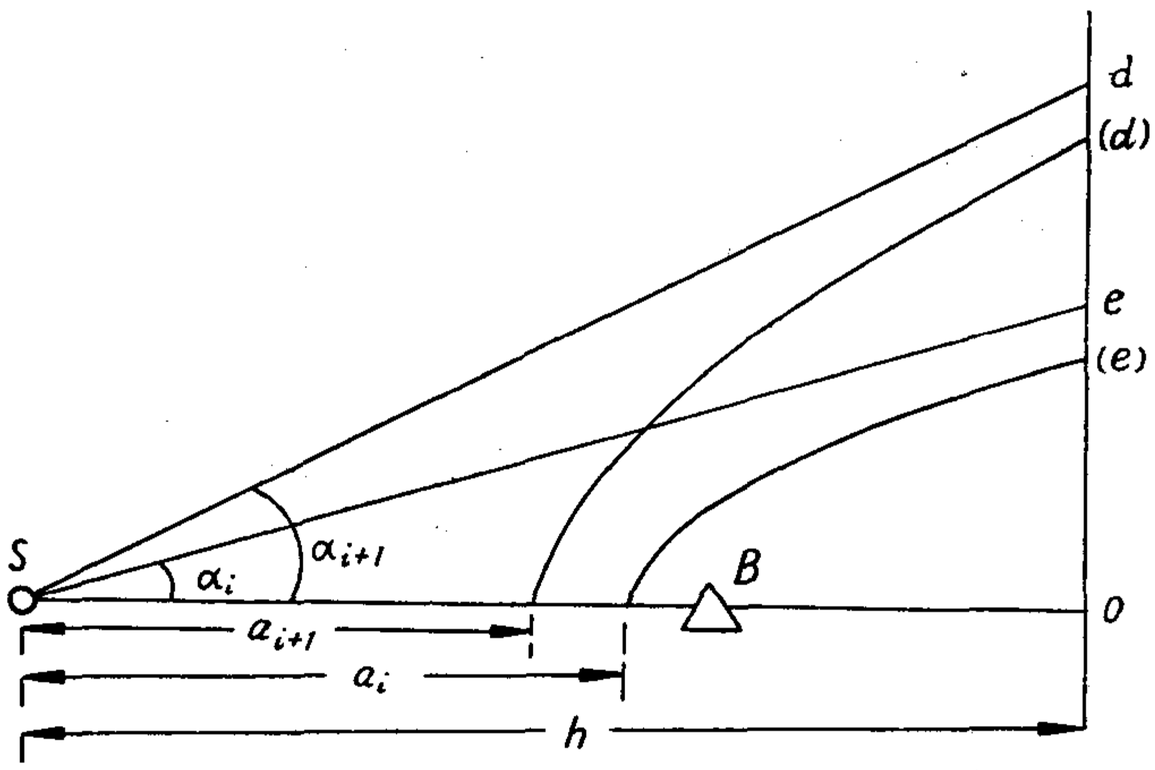


图　6

$$(e)o = \frac{b_i}{a_i}\sqrt{h^2 - a_i^2},$$

$$eo = \frac{b_i}{a_i}h.$$

同理可得:

$$(d)o = \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\sqrt{h^2 - a_{i+1}^2},$$

$$do = \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}h.$$

考虑到

$$\frac{b_i}{a_i} = \operatorname{tg}\alpha_i \quad 及 \quad \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} = \operatorname{tg}\alpha_{i+1},$$

可得:

$$\Delta f = f_{双曲} - f_{渐近} = \left[1 - \frac{(e)o}{(d)o}\right] - \left[1 - \frac{eo}{do}\right] \approx$$

$$\approx \frac{\operatorname{tg}\alpha_i}{\operatorname{tg}\alpha_{i+1}}\left[1 - \frac{2h^2 - a_i^2}{2h^2 - a_{i+1}^2}\right]. \tag{12}$$

从表 3 可知$\frac{\text{tg}\,\alpha_i}{\text{tg}\,\alpha_{i+1}}$的比值最大时也不会超过 1，今设其等于 1，则(12)式可改写为：

$$h=\sqrt{\frac{a_i^2-(1-\Delta f)a_{i+1}^2}{2\Delta f}}. \tag{13}$$

若设 $\Delta f \leqslant 0.001$，并取 0.02 周期时的 a_i 及 1.02 周期时的 a_{i+1}（因取此值时能得到最大的差值）. 则由(13)式可得：

$$h \approx 66 \text{ 公里}.$$

在利用渐近线代替双曲线造表时(此处没有顾及表 1 中所提的航高要求)，必须使飞机离基线电台下列距离以外通过：

$$h-c=66 \text{ 公里}-62 \text{ 公里}=4 \text{ 公里}.$$

3. 航跡不垂直于基线所发生的误差情况

参看图 7，设不垂直于基线的航迹 $\langle e\rangle\langle e'\rangle$ 和垂直于基线的航迹 ee' 间的夹角为 θ，显然，其余各角的数值应如图 7 所示.

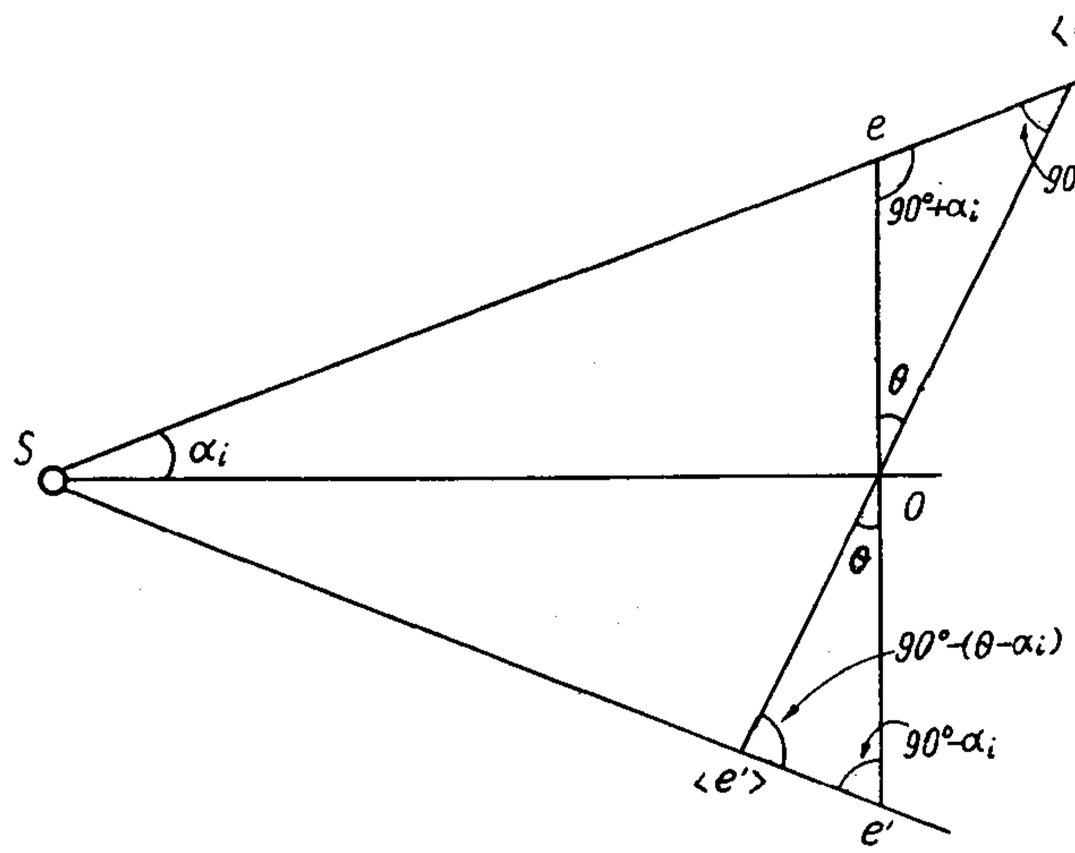


图 7

按正弦定律可得：

$$\left.\begin{aligned}\langle e\rangle o &= eo\,\frac{\cos\alpha_i}{\cos(\theta+\alpha_i)},\\ \langle e'\rangle o &= e'o\,\frac{\cos\alpha_i}{\cos(\theta-\alpha_i)}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

考虑到 $eo=e'o$，则(14)式中二式之和应等于：

$$\langle e\rangle\langle e'\rangle = 2ee'\,\frac{\cos^2\alpha_i\cos\theta}{\cos 2\alpha_i+\cos 2\theta},$$

同理

$$\langle d\rangle\langle d'\rangle = 2dd'\,\frac{\cos^2\alpha_{i+1}\cos\theta}{\cos 2\alpha_{i+1}+\cos 2\theta}.$$

又设

$$\langle f\rangle_{倾斜}=1-\frac{\langle e\rangle\langle e'\rangle}{\langle d\rangle\langle d'\rangle};\qquad f_{垂直}=1-\frac{ee'}{dd'},$$

则

$$\Delta f=\langle f\rangle_{倾斜}-f_{垂直}=\frac{ee'}{dd'}\left\{1-\frac{\cos^2\alpha_i[\cos 2\alpha_{i+1}+\cos 2\theta]}{\cos^2\alpha_{i+1}[\cos 2\alpha_i+\cos 2\theta]}\right\}.$$

或

$$\cos 2\theta=\frac{\cos^2\alpha_{i+1}\cos 2\alpha_i\left(1-\dfrac{\Delta f}{\dfrac{ee'}{dd'}}\right)-\cos^2\alpha_i\cos 2\alpha_{i+1}}{\cos^2\alpha_i-\cos^2\alpha_{i+1}\left(1-\dfrac{\Delta f}{\dfrac{ee'}{dd'}}\right)}.\tag{15}$$

从表 3 查得：

$$f_{最小}=\left(1-\frac{ee'}{dd'}\right)_{最小}=0.295,$$

则

$$\left(\frac{ee'}{dd'}\right)_{最大}=0.705.$$

在上述情况下，$i=1$ 周期，$i+1=2$ 周期，这样就可得下列各值：$\alpha_i=2°03'$，$\alpha_{i+1}=2°54'$（根据表 2 所载查正切函数），从(15)式中解出 θ 角：

$$\theta\approx 48°.$$

上面计算结果指出：飞机航迹不垂直于基线飞行时，其不垂直度允许达到 48°，此时尚不致影响表 3 中所载 f 值．这就是说，此因素的影响可完全忽略不计．

六、結 束 語

从以上分析看来，利用不带有自记数字计算器的无线电定位仪，在不进行航空摄影的情况下，也是能够测定基线长度，而且它比利用航空摄影的方法更简单和经济．

同时，为了提高测定基线长度的精度，可使飞机多次通过基线延长线，以便获得多次内插数据，这是不难做到的．

参 考 文 献

[1] Баландин В. Н., Зарубин Б. И., Опыт использования радиогеодезической системы для плановой привязки аэроснимков, *Геодезия и Картография*, 1963, №.11.

[2] Verstelle, T. Th., Use of the Decca Navigation Survey System in New Guinea for Hydrography and as a Geodetic Framework, *International Hydrographic Review*, 1958, No.1.

[3] Verstelle, T. Th., Practical Survey-applications of Decca and Accuracy-data from Operational Trials, Archives Internationales de Photogrammetric, 1950, Tome X, 1.

测量与地球物理集刊
第 二 号

对 钟 計 数 器*

施 正 范

一、概 述

经度测量的精度主要决定于测时和收时的精度，观测所使用的时钟与标准时钟(即无线电时号)比对的精度越高，经度测定的精度也就越高. 最经典的收时方法为耳目法，精度约达 0^s.1[1]. 1917 年库克首先创造出一种实用的收时方法，其最大误差约为 0^s.008 (平时钟) 或 0^s.007 (恆时钟)[2]，从而简化了收时方法，并使精度提高了一步. 苏联在收时方法和仪器上也进行了很多工作，在外业条件下一般采用半自动法[1]，使收时的精度达到 ± 0^s.004[3]；亦有用记时器或记时镜收时的. 我国自 1954 年以来所进行的一等天文点测量工作中，也多采用半自动法进行收时. 近十年来由于电子学的飞跃发展，收时的方法和仪器也得到不断的改进. 荷兰工艺大学教授 R. Roelofs 倡议并试用示波器进行收时，曾于 1953 年在该大学的测量学院内进行试验，其精度可达 0^s.001[4]；与此同时，用西德 Rohde & Schwarz 厂出品的大石英钟上的附件时号示波器 CAO 收时，其精度最高可达 0^s.0001[5]. 显然，用电子仪器进行收时，其精度之高远非用机电仪器所能比拟.

本文介绍的对钟计数器 (图 1) 是应用电子计数器作为收时的工具，当输入频率为 1 千赫或 10 千赫时，可直接读到 0^s.001 或 0^s.0001. 本仪器经过长期和在不同环境中使用的结果证明，仪器的精度是符合于精密收时工作需要的.

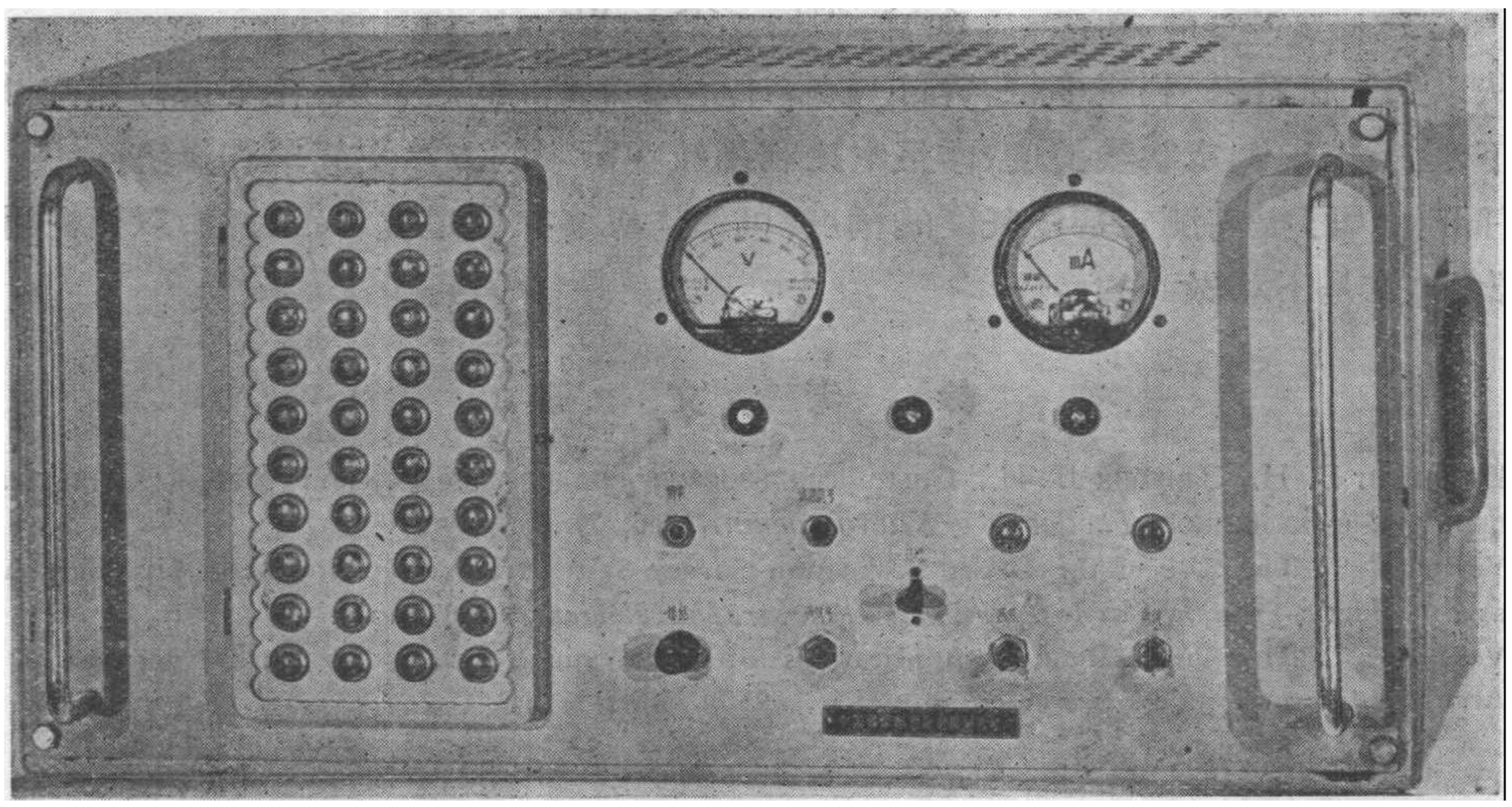


图 1

---

* 本仪器的线路采用电信科学 1958 年第 7 期上“直读式频率计”一文中的线路，其他线路得到上海徐家汇观象台的指导和帮助，在此谨致衷心的感谢.

1) 即改良的库克法.

二、工作原理

对钟计数器是由电子门、控制器、削波器、十进位计数器和还原设备等部分组成，其工作原理可用逻辑方框图(图 2)来说明.

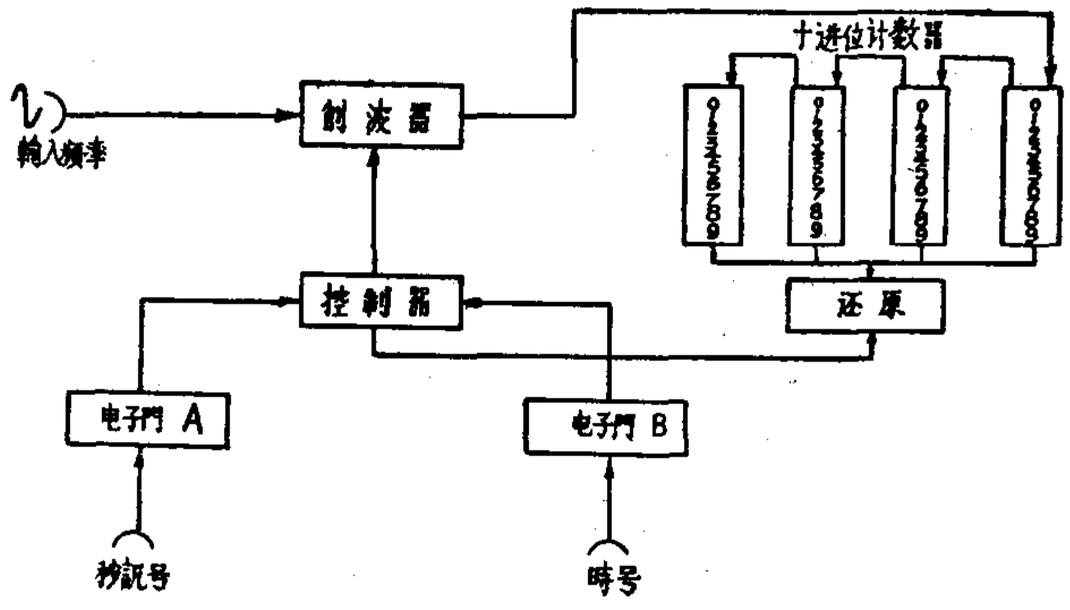


图 2

观测用的时钟与无线电时号之间的比对，是依靠由上述二者给出的讯号打开电子门，再通过控制器打开或关闭削波器，对十进位计数器输入的标准频率的周数来决定的. 即若在某一时刻 t，时钟的秒接触讯号打开电子门 A，使控制器得到高的电位，此时，削波器随之立即开始工作，使频率输入，并开始计数；而当另一时刻 t'，无线电时号打开电子门 B，使控制器回复到低电位，于是在同一瞬间输入的频率被截止了，并停止计数. 如将此两时刻归算至同一中央时刻的格林尼治地方时 T 和 T'，即可得到时钟与无线电时号之差，亦即钟差：

$$u = T' - T. \tag{1}$$

显然，在对钟计数器上所记录的频率的周数 f，作适当的化算即等于钟差 u.

三、綫路結构

1. 电子门

电子门的作用是当接触讯号（秒讯号或时号）进入的同时，供给触发控制器以电压脉冲，为此将电子门设计成电子继电器式的电压变换器，并通过微分电路得到(图 3).

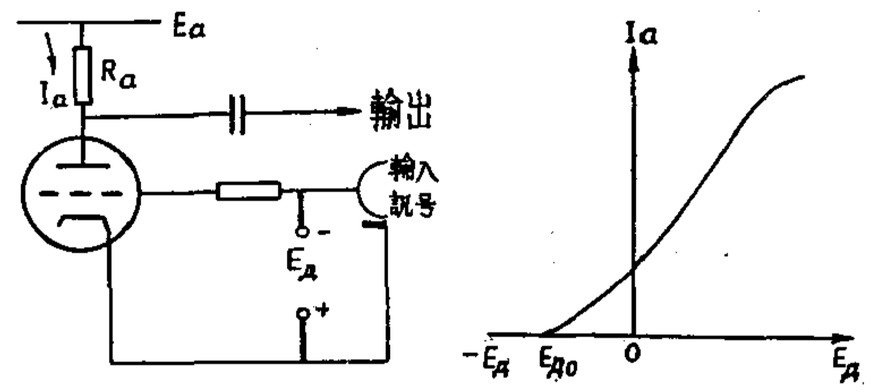


图 3

应用三极管板栅特性曲线给出的栅极截止电压，给予三极管以固定的负栅偏压 $E_{栅0}$，

以使屏流截止，此时屏极电位应为 E_a。但当讯号进入时，$E_{\text{入}}=0$，屏流突然上升，并在 R_a 上得到电压降为：

$$u_R = R_a \cdot I_a.$$

于是屏压为：

$$u_a = E_a - u_R = E_a - R_a I_a. \tag{2}$$

由于讯号进入，在屏极上得到的电压降 $R_a \cdot I_a$，经微分电路而得到电压脉冲。微分后脉冲电压的幅度，以能够触发控制器使其改变工作状态即可。

2. 控制器——双稳定点触发线路

控制器是由一板栅耦合的双稳定点触发线路组成，它的作用是供给和控制削波器的抑制电压，使频率得以输入或停止。

双稳定点触发线路可以在一个极短的时间内，由一个工作点跳到另一个工作点，即所谓突变，亦称雪崩状态。其突变时间一般可以在 1—2 微秒内完成，这就可以保证讯号进入的同时，工作就立即开始；若选用适当的电子管和元件，就可以把脉冲间歇值减小到 0.1 微秒[6]。线路的基本形式如图 4。

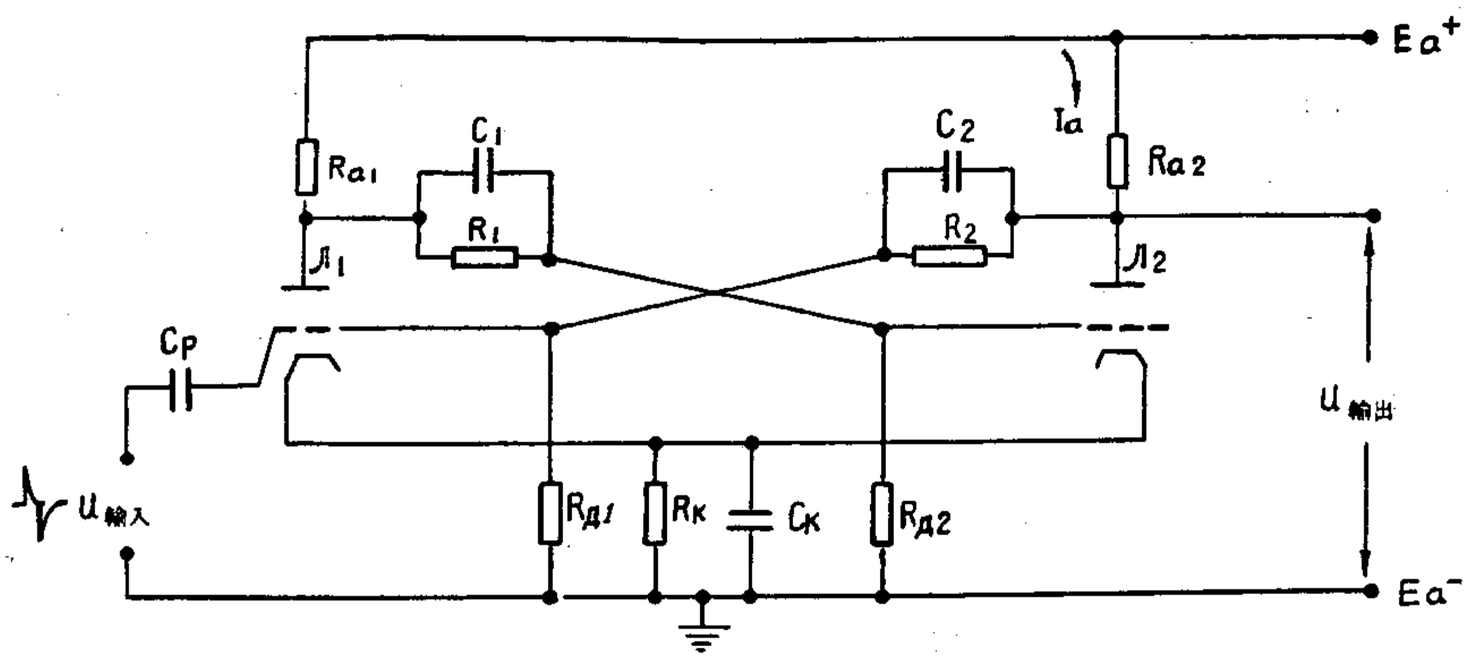


图 4

由图 4 可以看出线路的特点是：1）两个电子管的屏极电流流过共同的阴极电阻 $R_к$ 而得到自给偏压。2）两个电子管相应的元件数据应完全相同，即 $R_{a1}=R_{a2}$，$R_1=R_2$，$R_{д1}=R_{д2}$，$Л_1$ 与 $Л_2$ 的电参数亦应相等，从而组成了对称线路。3）由于线路的完全对称，所以电子管屏流的总和在任何时候都不变。4）为了加速突变时间，在极间分压器 R_1，R_2 上并联入 15—100pf 的旁路电容器 C_1 和 C_2，则当转换时，屏极的突变电压经过电容分压器（由电容 C 和电子管输入电容 $C_{дк}$ 组成，且 $C \gg C_{дк}$）几乎完全加到另一电子管的栅极上。5）为了避免突变持续时间变大，选择较小数值的 C_p(10—30pf) 是有利的。6）板—栅耦合线路在输入正弦电压时工作是困难的[7]，故必须输入尖顶形的脉冲电压。

板—栅耦合的双稳定点触发线路是在一个电子管截止，而另一电子管通流的情况下工作的，为了要满足上述当一个电子管 ($Л_1$) 处于截止状态时，另一电子管 ($Л_2$) 处于通流的状态，就必须选取适当的 R 和 $R_д$ 以及确定两电子管的栅极电位 $u_{дк}$。R 和 $R_д$ 亦可用图解法求得[8]。

双稳定点触发线路的等效电路如图 5 所示.

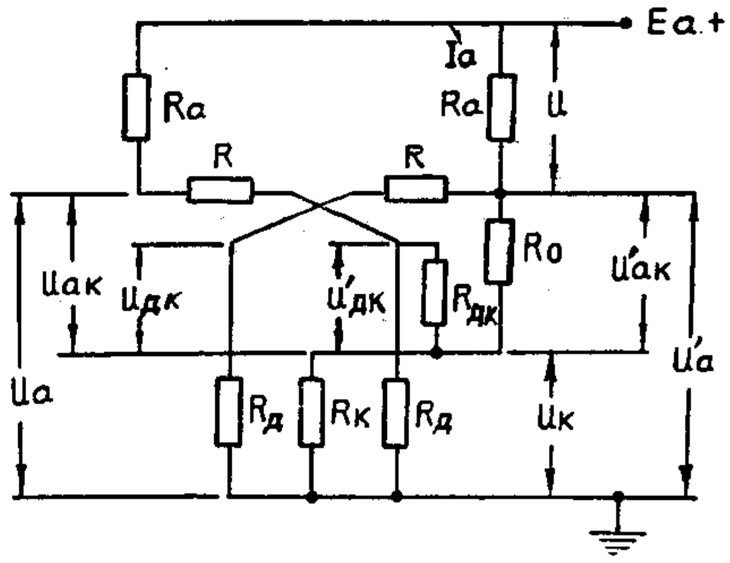


图　5

若使截止电子管在正常工作条件下保持可靠的截止，应满足下面的不等式：

$$u_к > u'_a \frac{R_д}{R + R_д} + |E_{д0}|,$$

于是

$$R > \left(\frac{E_a - u}{u_к - |E_{д0}|} - 1\right) R_д, \qquad (3)$$

或者

$$R > \frac{R_0 + \frac{|E_{д0}|}{E_a}(R_a + R_0 + R_к)}{R_к - \frac{|E_{д0}|}{E_a}(R_a + R_0 + R_к)} R_д, \qquad (4)$$

式中 $E_{д0}$ 为电子管截止电压，R_0 为电子管直流电阻，$u = u_{输出最大} - u_{输出最小} = E_a - (E_a - I_aR_a) = I_aR_a$.

截止时 $u_{дк}$ 必须低于电子管截止电压 $E_{д0}$，即 $u_{дк} \leqslant E_{д0}$，因而又要满足不等式：

$$u_{дк} = \frac{u_aR_д}{R_a + R + R_д} - u_к \leqslant E_{д0}, \qquad (5)$$

或者

$$u_{дк} = \frac{u_{aк}R_д - u_к(R_a + R)}{R_a + R + R_д} \leqslant E_{д0}. \qquad (6)$$

若使通流电子管在正常工作条件下保持可靠的通流，则必须满足下面的不等式：

$$u_к < \frac{R_д}{R + R_д} u_a,$$

或(当 $u_a \approx E_a$ 时)

$$u_к < E_a \frac{R_д}{R + R_д},$$

则

$$R < \left(\frac{E_a}{u_к} - 1\right) R_д, \qquad (7)$$

或

$$R < \left(\frac{R_a + R_0}{R_к}\right) R_д. \qquad (8)$$

通流时电子管栅压 $u_{дк}$ 必须大于零，即 $u_{дк} \geqslant 0$，因而又必须满足

$$u_{дк} = \frac{(u'_a + u)R_д}{(R_a + R + R_д)} - u_к \geqslant 0, \qquad (9)$$

或

$$u_{дк} = \frac{(u + u'_{aк})R_д - (R_a + R)u_к}{(R_a + R + R_д)} \geqslant 0. \qquad (10)$$

线路的设计即根据(4)，(6)，(8)，(10)诸式出发，可以保证当一个电子管处于截止状态时，另一电子管处于通流状态，并当有交替性脉冲输入时，通过电容 C_p 加到电子管栅

极或板极上，即可产生交替性的转换.

本仪器的触发器的设计，如图 6，是用电容隔离和以负脉冲触发屏极的. 如上所述，若电子管 $Л_1$ 处于截止状态，而 $Л_2$ 处于通流状态. 而当输入的负脉冲经隔离电容 C_p 同时加在两个电子管的屏极上时，由于 $Л_2$ 处于通流状态，即屏压低的情况，所以负脉冲对它不起作用；而 $Л_1$ 处于截止状态，即屏压高的状态，因而屏压瞬间降低. 负脉冲同时还经过 C_1—R_1 电路加到 $Л_2$ 管的栅极上，使栅极电位瞬时降低，$Л_2$ 屏流减少，R'_{a2} 上电压降随之减小，$Л_2$ 屏压升高；并通过 C_2—R_2 电路使 $Л_1$ 栅压增高，$Л_1$ 屏压降低，而使 $Л_2$ 栅压更低，直至 $Л_1$ 通流、$Л_2$ 截止而造成一次转换. 整个转换时间是在一瞬间进行完毕的. 同理，当下一个负脉冲进入时对 $Л_1$ 不起作用，而使 $Л_2$ 屏压降低，以至 $Л_1$ 栅压降低，而达到再次的转换；并同时输出一个负脉冲，从而达到了输入脉冲与输出脉冲为 2:1 的目的. 本仪器的控制器及计数器线路皆采用图 6 的线路，经试验在输入频率为 50 赫—50 千赫内皆可稳定和正常的工作.

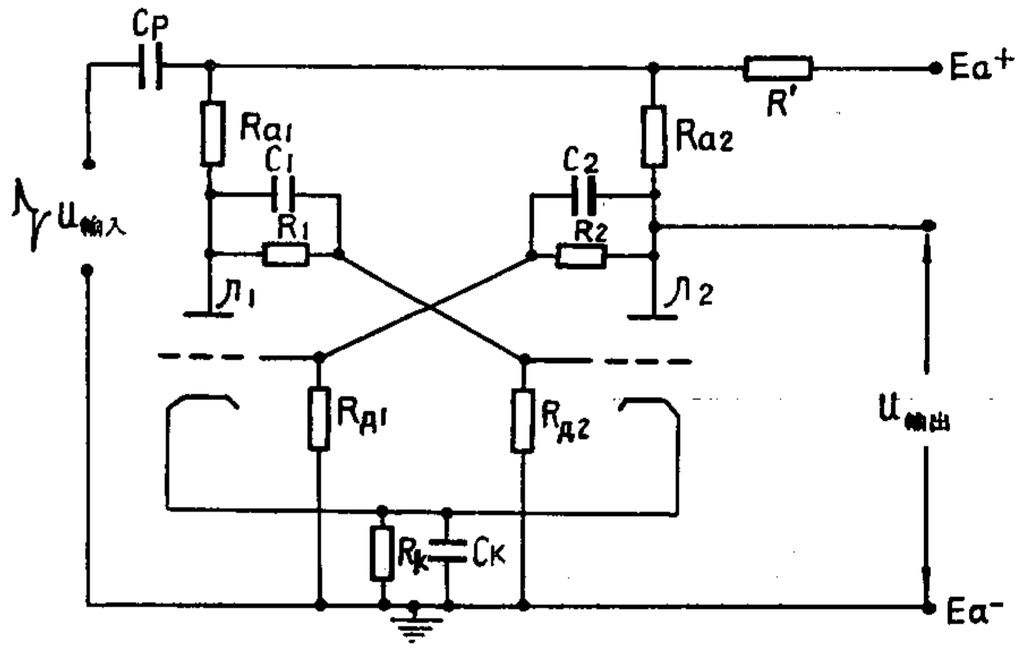


图 6

3. 削 波 器

如前所述，板—栅耦合双稳定点触发线路的输入脉冲电压 $e(t)$，应为尖顶形脉冲，因而必须将正弦波讯号变成有足够电压的脉冲，这便是削波器所要完成的任务，如图 7 所示.

削波器是利用电子管特性曲线中电流饱和的部分，即当输入电压到达一定限度以前，输出电压与输入电压成比例地变化，一旦到达此限度时，输出电压即保持不变的一种设备. 削波器一般有两种：1）二极管不放大的削波器. 2）栅极板极同时并用，及具有放大作用的削波器，因而也叫做放大削波器. 削波后脉冲边缘的斜率和持续期的极限决定于电路的寄生电容[9]. 本仪器应用了放大削波器. 放大削波器可以应用三极管或五极管，它是一种工作在特殊状态下的电阻放大器，如选择适当偏压和输入电压的振幅，就可以得到双向削波，但这种削波当有大的屏极负载时，即当频率较低而边缘斜率不大时，只能应用五极管[10].

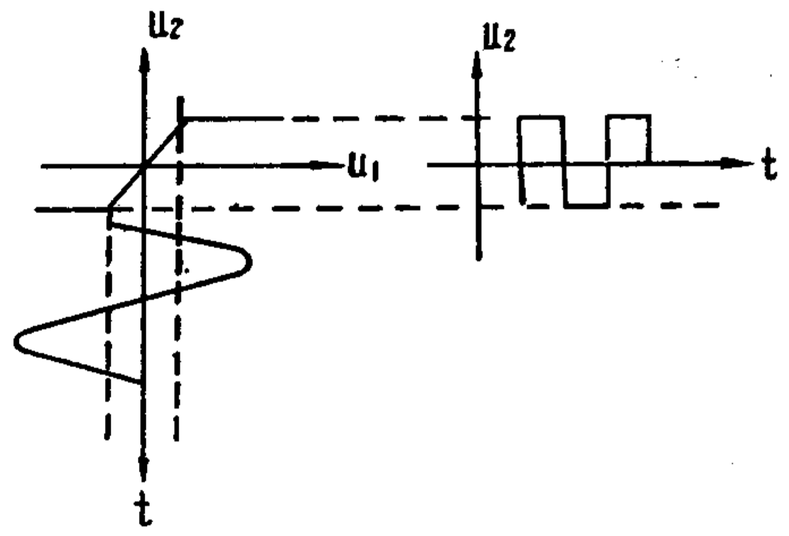


图 7

本机采用的削波器电路如图 8 所示，它是由两只五极管 6Ж8 和一个双三极管 6Н1П 所组成. $Л_1$ 的抑制栅受控制电路控制，在控制电路未开放时（即秒讯号未进入前），抑制栅处于低电位，正弦讯号在 $Л_1$ 处被截止. 当秒讯号进入时，控制电路打开抑制栅而处于高电位，此时输入的正弦讯号经 $Л_1$ 放大削波后，波形的顶部较圆，经隔离电容达到 $Л_2$ 栅

极. 同理，由 J_2 再次放大削波使成更方的波形，而加到 J_3 的栅极上，复经双三极管再次放大和削波，便可输出较好的方波，并经微分电路变成脉冲，此脉冲电压 $e(t)$ 便可供计数器进行计数(当输入频率低于 50 千赫时).

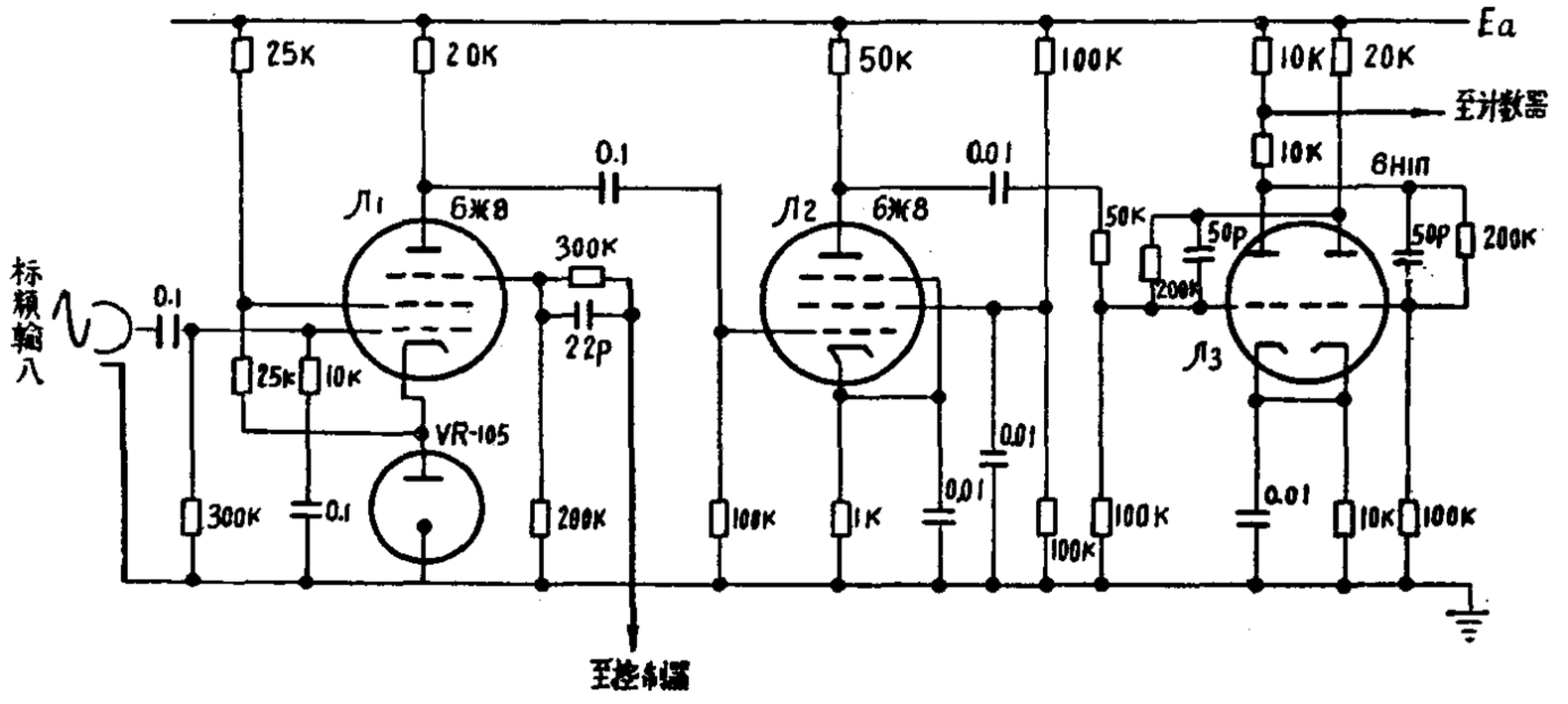


图 8

四、十進位計数器及其編碼

我们将脉冲技术中应用相当广泛的板—栅耦合的双稳定点触发线路作为十进位计数器的基本线路. 该线路亦应用于各种进位和分频中. 如前所述，这个线路可以在两个脉冲输入后，输出一个脉冲而组成 2:1 的条件，故而又称为二进位触发线路. 正是应用了这个特点而组成 2^n 的计数系统. 十进位计数系统是将四级二进位单元线路迭接起来变成

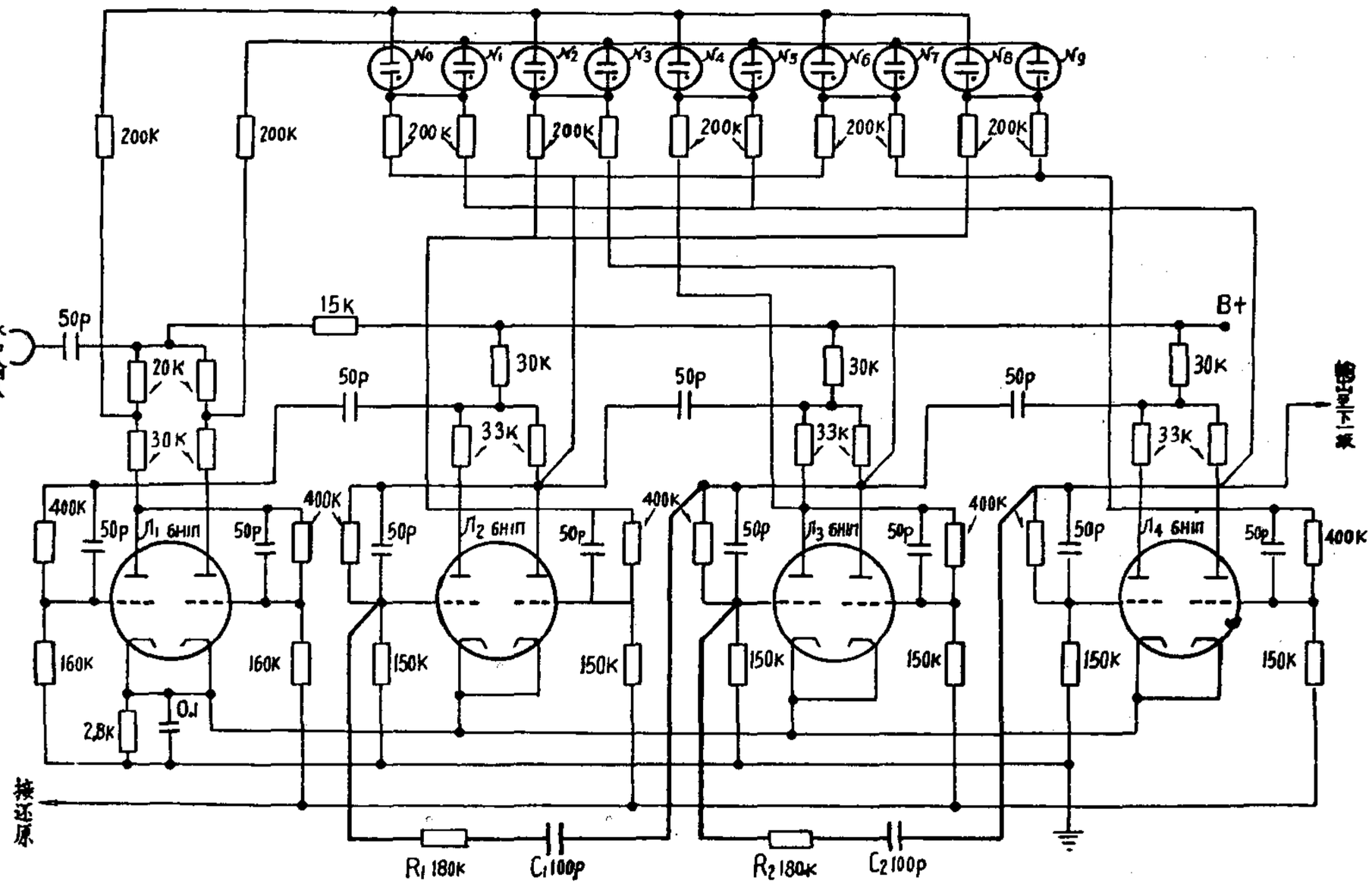


图 9

$2^4 = 16$ 的分频比，再加上适当的反馈线路，即可变二进位系统为十进位计数系统[11]. 适当的反馈是在线路内部改变若干次稳定状态，以造成 $16 - 6 = 10$ 的条件，从而变输入脉冲与输出脉冲为 10:1 的分频比. 反馈是安置在 $Л_2$, $Л_3$ 以及 $Л_3$, $Л_4$ 之间（见图 9 中的粗线），即在第四个脉冲到达时，由 $Л_3$ 右屏极经 C_1R_1 回输，这相当于附加二个脉冲；而在第六个脉冲到达时，由 $Л_4$ 右屏极经 C_2R_2 回输，相当于附加四个脉冲；两次回输，即相当于附加六个脉冲.

电子管编号	$Л_1$		$Л_2$		$Л_3$		$Л_4$		起辉指示
	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	×	○	×	◎	×	○	×	◎	N_0
1	○	×	×	◎	×	○	×	◎	N_1
2	×	○	◎	×	×	◎	×	○	N_2
3	○	×	◎	×	×	◎	×	○	N_3
4	×	○	⊗	×	◎	×	×	◎	N_4
5	○	×	○	×	◎	×	×	◎	N_5
6	×	○	×	◎	⊗	×	◎	×	N_6
7	○	×	×	◎	○	×	◎	×	N_7
8	×	○	◎	×	○	×	◎	×	N_8
9	○	×	◎	×	○	×	◎	×	N_9
10	×	○	×	◎	×	○	×	○	N_0

× 表示电子管截止狀态
○ 表示电子管通流狀态
⊗ 表示反馈

图 10

十进位单元线路各电子管右栅极电路，皆由一开关接地，当开关开路的一瞬间，全部计数线路电子管左端处于截止状态，此时氖灯 N_0 起辉，全部线路还原以便重新开始工作. 十进位单元线路电子管工作状态如图 10 所示. 氖灯的起辉是由各电子管的工作状态确定. 氖灯的连接，按图 10 中框线进行，如 N_4, N_5 分别接在 $Л_3$ 左端和 $Л_4$ 右端；且 N_0, N_2, N_4, N_6, N_8 的一端共同接在 $Л_1$ 的左端，而为 $Л_1$ 的屏极电位所控制. 只有在 $Л_1$ 左端截止屏压为最高的状态下，以上诸氖灯方可能起辉. 而 N_1, N_3, N_5, N_7, N_9 的一端共同接在 $Л_1$ 右端，亦为它所控制，只有在 $Л_1$ 右端截止状态下方可能起辉. 因而每进入一个脉冲时，便只有一个氖灯起辉，当脉冲连续进入时，就可以按 0—10 的次序顺序起辉.

五、計数器的迟滞差及誤差

本仪器应考虑的误差主要有以下几种：1）电路的迟滞差 τ. 2）输入频率在收时过程中不稳定的误差 K. 3）时号与输入频率不同步可能产生的误差等，现分别叙述如下.

1. 电路的迟滞差 τ

一般说来，电路的迟滞差 τ 决定于时间常数. 电子门和触发控制器采用了完全对称的电路，两个电子管相应的元件数据亦完全相等（图 11）. 由秒讯号进入开始计数和时号进入停止计数所受的迟滞影响，可以认为是相等的，因而对所计数的数值不带来误差. 实际上，误差是由于放大削波器（图 8）中寄生电容 C_0 的存在，使输出电压 u_2 在 t_1 瞬间以后，按时间常数 $\tau = RC_0$ 所确定的指数曲线变化.

放大削波器用了两只五极管 6Ж8 和一只双三极管 6Н1П，由于五极管的板栅电容 C_{aM} 很小，可以略而不计[12]，故寄生电容

$$C_0 = C_{输出} = C_H + C_{aK} + C_M = 15 + 7 + 7 = 29pf,$$

式中 C_H 为负载电容，C_{aK} 为板阴电容，C_M 为安装电容.

五极管的正负跳变边沿持续时间相等[13]，故

$$\tau_{\Phi_1} = \tau_{\Phi_2} = \tau_\Phi \approx 3R_aC_{输出},$$

按 6Ж8 计算第一级为 $\tau_\Phi \approx 3R_aC_{输出} = 3 \times 20 \cdot 10^3 \times 29 \cdot 10^{-12} = 1.7$ 微秒；第二级为 $\tau'_\Phi \approx 3R_aC_{输出} = 3 \times 50 \cdot 10^3 \times 29 \cdot 10^{-12} = 4.4$ 微秒.

三极管 6Н1П 负跳变前沿持续时间为：

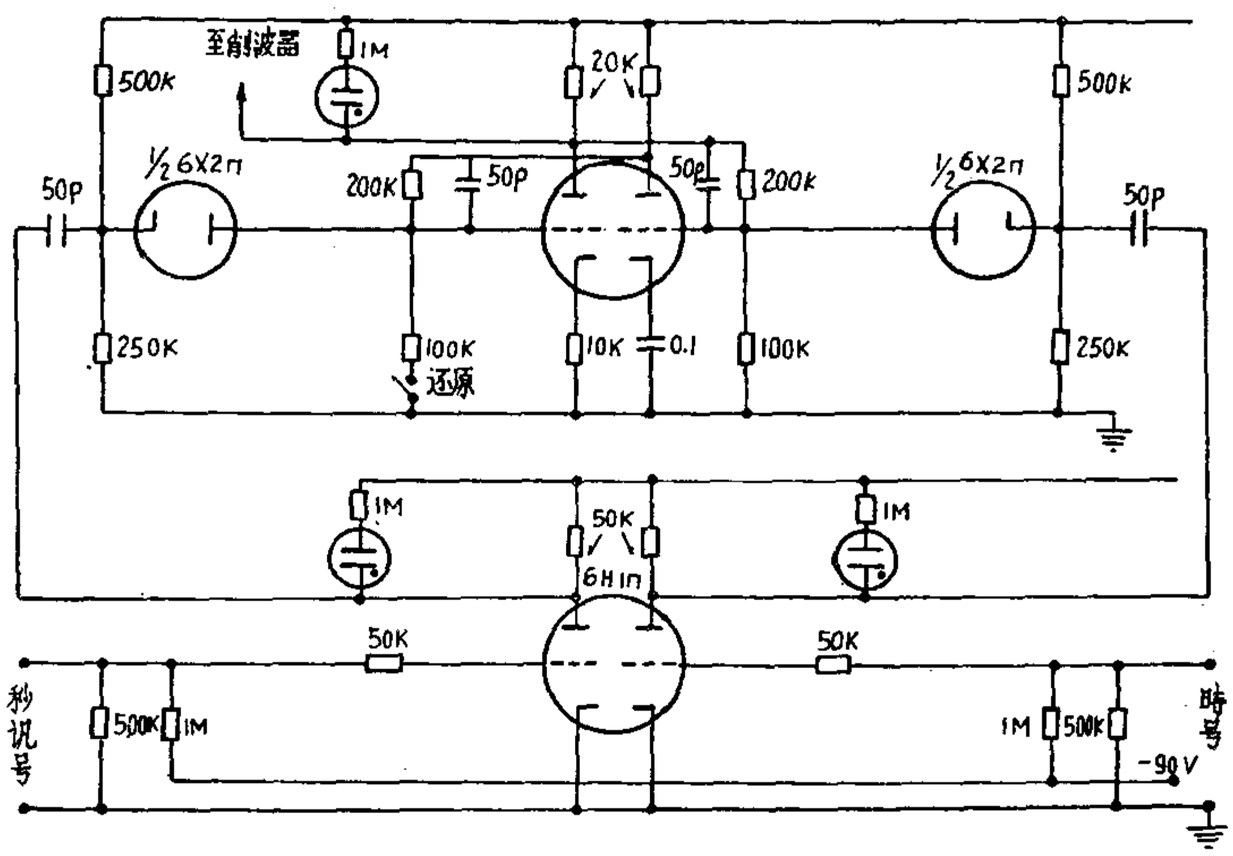


图 11

$$\tau_{\Phi_1} \approx 3\frac{R_i R_a}{R_i + R_a}(C_{Aa} + C_{输出}) = 3\frac{(8 \times 20)\cdot 10^6}{(8+20)\cdot 10^3}(1.8 + 29)\cdot 10^{-12} = 0.5 \text{ 微秒}.$$

正跳变前沿持续时间为：

$$\tau_{\Phi_2} \approx 3R_a(C_{Aa} + C_{输出}) = 3 \times 20 \cdot 10^3 \times 30.8 \cdot 10^{-12} = 1.8 \text{ 微秒}.$$

由于电路使用负脉冲触发，放大削波器的迟滞差的总和 $\tau = 1.7 + 4.4 + 0.5 = 6.6$ 微秒.

2. 输入频率在收时过程中不稳定的误差 K

若在收时过程中输入的频率有变动，显然所记录的频率必有误差. 一般如使用小石英钟，其日频率稳定度可达 10^{-7} 级，因而在十分钟内可视为极其稳定的，故 K 可略而不计.

3. 时号与输入频率不同步可能产生的误差

比对时是以石英钟的秒讯号开动电子门 A，因而与石英钟的输入频率是同步的. 但用以启动电子门 B 的则是无线电时号，并不一定与输入频率同步，如图 12 所示. 从图中可以看出，若时号恰位于 A 点，则计数时间段等于被测时间段. 但若时号位于 A' 点，则下一个计数脉冲尚未被记录前，计数已停止，故计数时间段必须约加 1 周，方可等于被测时间段，否则就可能产生约整 1 周的误差.

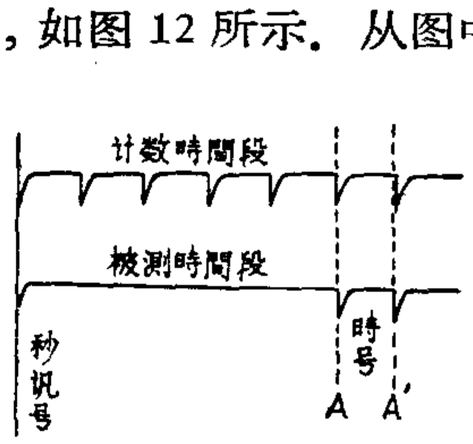


图 12

综合上述，可知计数器总误差 $\Delta = \tau + K + 1$ 周. 由于 τ, K 皆很小，可略而不计，则误差主要决定于时号与输入频率的不同步，即 $\Delta_{max} \doteqdot \pm 1$ 周. 如输入频率为 1 千赫时，则 $\Delta_{max} \doteqdot \pm 0.001$.

实际上，由于计数器系处于不同的情况下工作的，如气温、气压、湿度的不同，电子管

及各个元件的不稳定以及工作点的漂移等，这样皆会使计数器的总迟滞差与理论计算值不能完全符合．重要的是在同一个工作条件下计数器的总迟滞差应保持稳定或不应有过大的变动，这样便可在工作期间进行迟滞差的测定，以便对最后值进行改正．表 1 和表 2 列出了拉萨和西安两测站所测计数器迟滞差的数值．从表中可见，在不同的两测站上计数器的总迟滞差虽微有差异，而在同一测站上迟滞差是十分稳定的．根据在示波记录器上的观测，两台 XSZ 型小石英钟的秒接触讯号皆有 ±0.001 的误差，这种误差也会带到利用秒接触讯号的各种测量中．但这些误差对天文基本点收时工作，仍然可以忽略．

表 1

观测地点：拉萨

日期	时间（世界时）	迟滞差读数	V
1960年 9 月 19/20 日	13h	0.996	−2
20/21	13	0.998	0
21/22	13	0.998	0
22/23	13	0.998	0
23/24	13	0.998	0
25/26	13	0.997	−1
27/28	13	0.998	0
28/29	13	0.998	0
29/30	13	0.999	+1
30/1	13	0.999	+1
中数		0.998	

$$m = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \pm 0.0009$$

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0.0003$$

表 2

观测地点：西安

日期	时间（世界时）	迟滞差读数	V
1960年10月 18/19 日	13h	0.000	0
19/20	17	0.000	0
20/21	17	0.999	−1
21/22	11	0.000	0
25/26	9	0.999	−1
25/26	17	0.998	−2
26/27	9	0.000	0
26/27	15	0.999	−1
27/28	11	0.000	0
28/29	9	0.000	0
中数		0.000	

$$m = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \pm 0.0009$$

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0.0003$$

六、使　用

本仪器应配用在具有秒接触设备的石英钟（如 Rohde & Schwarz 厂出品的 XSZ 型小石英钟）及附有输出接触继电器的收讯机（如全能经纬仪 Wild T_4 附件 ZZE 型收讯机）上．为了便于测定对钟计数器，收讯机的接触继电器和记时用的中间继电器（为避免记时仪电流过大而烧坏石英钟的秒接触，故在一般观测的时间记录时，不直接使用石英钟的秒

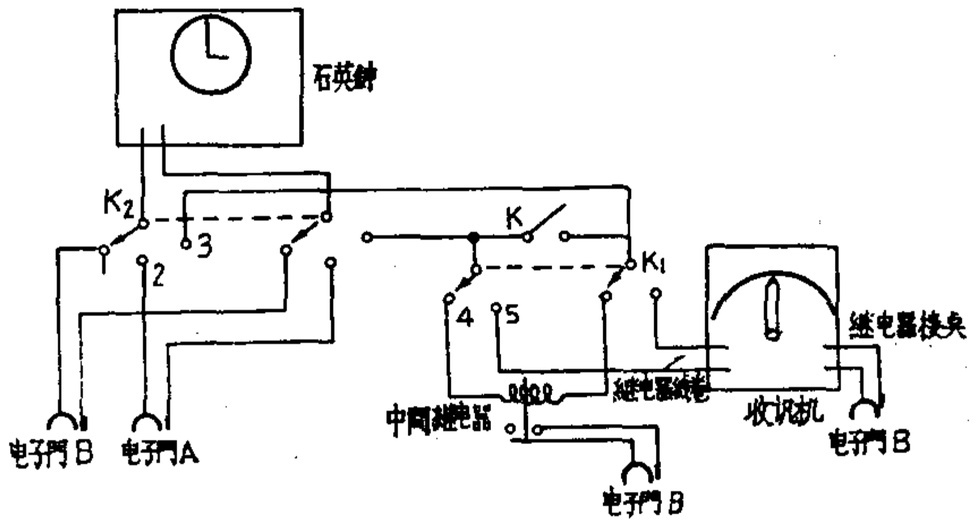


图　13

接触点，而在其间加入一质量较好、电流较小、迟滞差较稳定的极化继电器）的迟滞差的设计，如图 13 线路是有利的．现将对钟及测定迟滞差的方法叙述如下．

1. 对　　钟

将 K 关闭，K_1（双刀双掷开关）扳至 5 的位置，K_2（双刀三掷开关）扳至 2 的位置，并以收讯机继电器的输出接点触动电子门 B 即可．对钟工作是在时号播送的时间内进行的．当收讯机已调整到正确的接收频率上，并使时号能准确地在收讯机继电器上产生秒接触后，便可开始比对．比对是以石英钟的秒讯号触动电子门 A，以开动计数器，收讯机继电器接点触动电子门 B，以关闭计数器．比对前使计数器还原，数字归零后开动秒讯号进行计数，一俟计数开始就可关闭秒讯号，以待时号进入使计数停止．记录计数器的读数 f 经换算后，即得到一次比对的钟差．必须注意，比对所得的钟差，即指示时钟与时号之间秒尾数之差，秒以上的差数和钟差为正或负，用目测法是极易得到的，故一般比对的读数是在一秒的时段内得出．如此连续进行若干次比对，取其平均值作为钟差 u 的最后值．

2. 测定对钟计数器的迟滞差 $\Delta\tau$

由于多方面的原因，计数器的迟滞差并非完全不变，故用石英钟的秒讯号及标准频率予以检验的同时，还需测定计数器的电路工作是否良好，因其中可能包含有石英钟秒接触讯号的误差．测定的方法是：将电子门 A 和电子门 B 的插头分别插入计数器，使石英钟某一秒讯号经 $K_2$2 的位置输至电子门 A，待开始计数后，立即将 K_2 扳至 1 的位置，以待第二个秒讯号经由电子门 B 来关闭计数器．时间段恰为 1 秒，记录计数器的读数 f' 减去 1 秒输入计数器的标准频率 f，即为迟滞差：

$$\Delta\tau = f' - f.$$

3. 测定收讯机继电器的迟滞差 Δf

收讯机继电器迟滞差的测定，应在时号播送的第 00^m10^s 到 00^m30^s 和第 06^m10^s 到 06^m30^s 的两次 20^s 长响间内进行．首先将 K 开路，K_1，K_2 分别扳至 5 和 2 的位置．使石英钟某一秒讯号经电子门 A 打开计数器进行计数，然后将 K_2 扳至 3 的位置，使第二个秒讯号接通收讯机继电器，并以继电器输出接点触动电子门 B 以关闭计数器．将计数器读数 f' 减去 1 秒内输入的标准频率 f，即得到继电器的迟滞差：

$$\Delta f = f' - f.$$

4. 测定中間继电器的迟滞差

此项测定也和测定收讯机继电器迟滞差方法相同，只不过可以在任意两秒钟内进行．测定时将 K 开路，K_1 扳至 4 的位置．第一秒打开电子门 A 后，将 K_2 扳至 3 的位置，待第二秒打开中间继电器，并由中间继电器的输出接点触动电子门 B 以关闭计数器．由计数器读数 f' 减去 1 秒内输入的标准频率 f，即得到中间继电器的迟滞差：

$$\Delta f = f' - f.$$

本仪器在应用时，最重要的是使工作点稳定，因而制作中必须满足电路对元件的特性

要求，对于电源的稳定、防止各种干扰、单元线路的屏蔽、焊接的牢靠、元件的质量、线路的排列等皆应很好的考虑。

七、观 测 成 果

观测是使用 Rohde & Schwarz 厂出品的附有秒接触设备的 XSZ 型小石英钟，和 ZZE 型附有用接触继电器作为输出讯号设备的收讯机。比对是与我国徐家汇观象台播送的 BPV 时号中的平时时号和科学式时号进行对比的，观察所使用的时钟与无线电时号的比对工作一般是取每十个读数为一组，在一次收录中平时时号和科学式时号各取一组。每

表 3

地点：拉萨 日期：1960 年 9 月 20/21 日 时间：17h BPV 输入频率 10 千赫/秒

平时式			科学式				
计数器读数	V	收讯机继电器迟滞差	秒 次	计数器读数	归算至中央时号读数	V	收讯机继电器迟滞差
$0^s.857$	0	$0^s.008$	31	$0^s.347$	$0^s.855$	−2	$0^s.006$
0.857	0	0.007	41	0.184	0.856	−1	0.007
0.856	−1	0.009	51	0.019	0.855	−2	0.007
0.857	0	0.007	11	0.678	0.858	+1	0.008
0.856	−1	0.009	21	0.511	0.855	−2	0.008
0.858	+1	0.010	31	0.349	0.857	0	0.009
0.856	−1		41	0.184	0.856	−1	0.009
0.857	0		52	0.005	0.857	0	0.008
0.857	0		23	0.480	0.857	0	
0.857	0		42	0.170	0.859	+2	
中数0.857		0.008			中数0.857		0.008

$$u = 0.857 - 0.008 = 0^s.849$$

表 4

地点：西安 日期：1960 年 10 月 20/21 日

平时式			科学式				
计数器读数	V	收讯机继电器迟滞差	秒 次	计数器读数	归算至中央时号读数	V	收讯机继电器迟滞差
$0^s.123$	−1	$0^s.009$	6	$0^s.026$	$0^s.124$	0	$0^s.010$
0.124	0	0.010	15	0.863	0.125	+1	0.010
0.124	0	0.011	26	0.681	0.124	0	0.011
0.126	+2	0.011	36	0.518	0.125	+1	0.010
0.124	0		46	0.353	0.123	−1	0.010
0.123	−1		57	0.173	0.124	0	0.010
0.125	+1		23	0.434	0.127	+3	
0.126	+2		33	0.566	0.123	−1	
0.123	−1		51	0.272	0.124	0	
0.124	0		3	0.075	0.124	0	
中数0.124		0.010			0.124		0.010

$$u = 0.124 - 0.010 = 0^s.114$$

一比对值皆归算至播时的中央时号．在收录平时时号和科学式时号之后的 20 秒长响时，测定收讯机接触继电器的迟滞差以便对最后值进行改正．现举二例，如表 3 和表 4 所列．

时间的化算是从这样的概念出发的，由于计数器是用频率来表现时钟与无线电时号之间的时刻之差，故应将频率的读数化算成时间．众所周知，频率与周期的关系为 $f=\frac{1}{T}$，或 $T=\frac{1}{f}$．从这个概念出发可以很方便地将计数器上记录的频率化算成时间．若输入频率为 1 千赫，则每一周的时间应为 $T=\frac{1}{1000}=1$ 毫秒，从而在计数器上可直读出 0:001．若输入为 10 千赫，同理可直读出 0:0001，所以根据输入的频率，就可以由计数器上方便地取得时钟与无线电时号之间的时间差数．

八、精度的評定

计数器精度的评定，是应用在拉萨和西安两地观测的、连续十天的同一播时时号所得的平时钟差和科学式时号钟差的结果（表 5 和表 6），并按下式进行计算的，

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma[VV]}{n-K}},$$

式中 $[VV]$ 为一组观测结果的数学平均数与每个读数差数的平方和，n 为所计数的全部读数的个数，K 为所计数的组数．

表 5

地点：拉萨

日　　期	比对时号	读数个数	$U_{平}$（毫秒）	$[VV]$	读数个数	$U_{科}$（毫秒）	$[VV]$
1960年 9 月 22/23 日	15^{h}BPV	11	304	13	11	304	18
23/24	15^{h}BPV	11	333	5	11	333	20
24/25	15^{h}BPV	10	358	14	10	358	43
25/26	15^{h}BPV	11	386	10	10	386	13
26/27	15^{h}BPV	11	421	13	10	420	13
27/28	15^{h}BPV	11	450	12	11	453	32
28/29	15^{h}BPV	11	478	9	9	479	30
29/30	15^{h}BPV	11	506	4	8	506	19
10.30/1	17^{h}BPV	11	537	21	10	536	37
1/2	15^{h}BPV	11	560	14	8	561	19
		N10.9		$\Sigma[VV]$115	N9.8		$\Sigma[VV]$244

$$m_{平}=\pm\sqrt{\frac{\Sigma[VV]}{n-K}}=\pm\sqrt{\frac{115}{99}}=\pm1.08,\quad M=\pm\frac{m}{\sqrt{N}}=\pm0.33;$$

$$m_{科}=\pm\sqrt{\frac{244}{88}}=\pm1.66,\qquad M=\pm0.53.$$

一组观测的精度则为：

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{N}},$$

式中 N 为每组结果的平均读数．

表 6

地点：西安

日期	比对时号	读数个数	$U_{平}$(毫秒)	$[VV]$	读数个数	$U_{科}$(毫秒)	$[VV]$
1960年10月 8/19 日	15^hBPV	11	081	10	10	082	3
19/20	15^h	11	100	3	9	101	12
20/21	15^h	11	124	13	10	124	13
21/22	13^h	11	147	7	10	148	28
23/24	13^h	11	201	2	9	202	25
24/25	13^h	11	230	11	9	232	7
25/26	13^h	11	263	5	10	263	9
26/27	13^h	11	299	9	10	303	25
27/28	13^h	11	332	18	10	332	52
28/29	13^h	11	365	10	9	366	30
		$N11.0$		$\sum[VV]88$	$N9.6$		$\sum[VV]204$

$$m_{平}=\pm\sqrt{\frac{\sum[VV]}{n-K}}=\pm\sqrt{\frac{88}{100}}=\pm0.94,\quad M=\pm\frac{m}{\sqrt{N}}=\pm0.28;$$

$$m_{科}=\pm\sqrt{\frac{204}{86}}=1.54,\qquad M=\pm0.50.$$

由表 5 和表 6 中可以看出，对钟计数器的平时时号一个读数的精度可满足 1 毫秒左右，而科学式时号一个读数的精度约为 1.5 毫秒左右．这是由于收录平时时号，可以取数个时号比对的平均值作为一个读数，又因为在一个很短的时间内小石英钟的秒讯号与时号之间的差数是十分稳定的，故若希望每个读数的精度提高，则可以在比对时取数个读数的中数，这样也可以降低收讯机继电器迟滞差不稳定所造成的影响．而科学式时号则只能每一个时号读取一个读数，特别由于收时工作是采用的接触式讯号，时号是经 ZZE 型收讯机（图 14）的线路变时号为接触讯号的．我们知道，接收无线电讯号的强弱、收讯机工作点的漂移以及电离层的变动等皆会影响收讯机的输出强度，此强度的变化使继电器的灵敏度发生变化，因而也使迟滞差随之改变．由一次继电器迟滞差测定中可知，其变动一般为 0.005，而在收时前后两次测定继电器迟滞时，最大的变动可达 0.010，甚至 0.012．

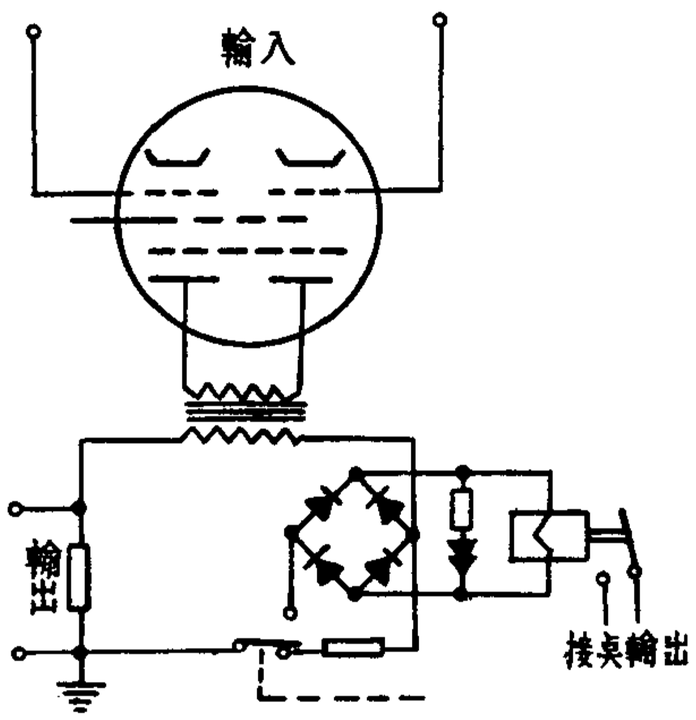


图 14

由于这种变动而引起收时中的每个读数的变动．因而表中收录平时时号的精度比科学式时号精度为高是可以解释的．所以我们建议在一般情况下尽可能收录平时时号，并以科学式时号收录数值作为参考较为适宜．

参 考 文 献

[1] 武汉测绘学院天文与重力测量教研组编，大地天文学下册，第 71 页，1961．

[2] 鲁罗佛斯，R.，实用天文测量学(中译本)，第 77 页，测绘出版社，1959．

[3] 茨维特考夫，K. A.，实用天文学(中译本)，第 88 页，测绘出版社，1956．

[4] Th. de Haas, A New Method and a New Instrument for the Determination of the Chronometer Correction by Means of Radio Time Signals, *Bulletin Géodésigue*, No. 39, p. 21, 1956.

[5] The Instruction Book of Standard Time System Type CAA BN 7804.

[6] 米耶罗维奇，Л. А.，杰里钦科，Л. Г.，脉冲技术(中译本)下册，第 467 页，国防工业出版社，1961．

[7] 同[6]，第 33 页．

[8] Енютин, В. В., Никулин, С. М., Спусковые устройства, стр. 65, Госэнергоиздат, М., 1957．

[9] 克雷洛夫，Н. Н.，脉冲技术(中译本)，第 110 页，高等教育出版社，1958．

[10] 同[9]，第 115 页．

[11] 电信科学编辑部根据崔志光供给资料编写，直读式频率计，电信科学，1958 年 7 月号．

[12] 顾著、龑林同合编，脉冲技术上册，第 25 页，北京科学教育编辑室，1961．

[13] 同[6]，上册，第 137 页．

测量与地球物理集刊
第 二 号

微波测距发展現状

夏 治 中

一

自 1957 年微波测距仪问世以来，在短短的八年时间内已获得了很大的发展. 目前，无论在大地测量、航空摄影测量、海道测量以及工程测量中，这种测距系统愈来愈得到广泛的应用.

微波测距究其实质乃是测定电磁波在待测距离上往返后的相位差. 按测距系统分类来说，这种方法属于相位法. 与脉冲测距方法比较，前者容易得到较高的测时精度.

微波测距仪整套仪器一般由一个主台和一个副台组成. 主台发射出由固定频率调制的高频调制波[1]，而一个相似的调频波——其上调制着频率不同于主台，但却与它相应的讯号——则由副台辐射回来，经主台的电子线路后，在仪器的显示单元或测相装置中，进行输出及输入两调制讯号的相位比较. 这种情况可用图 1 a 表示.

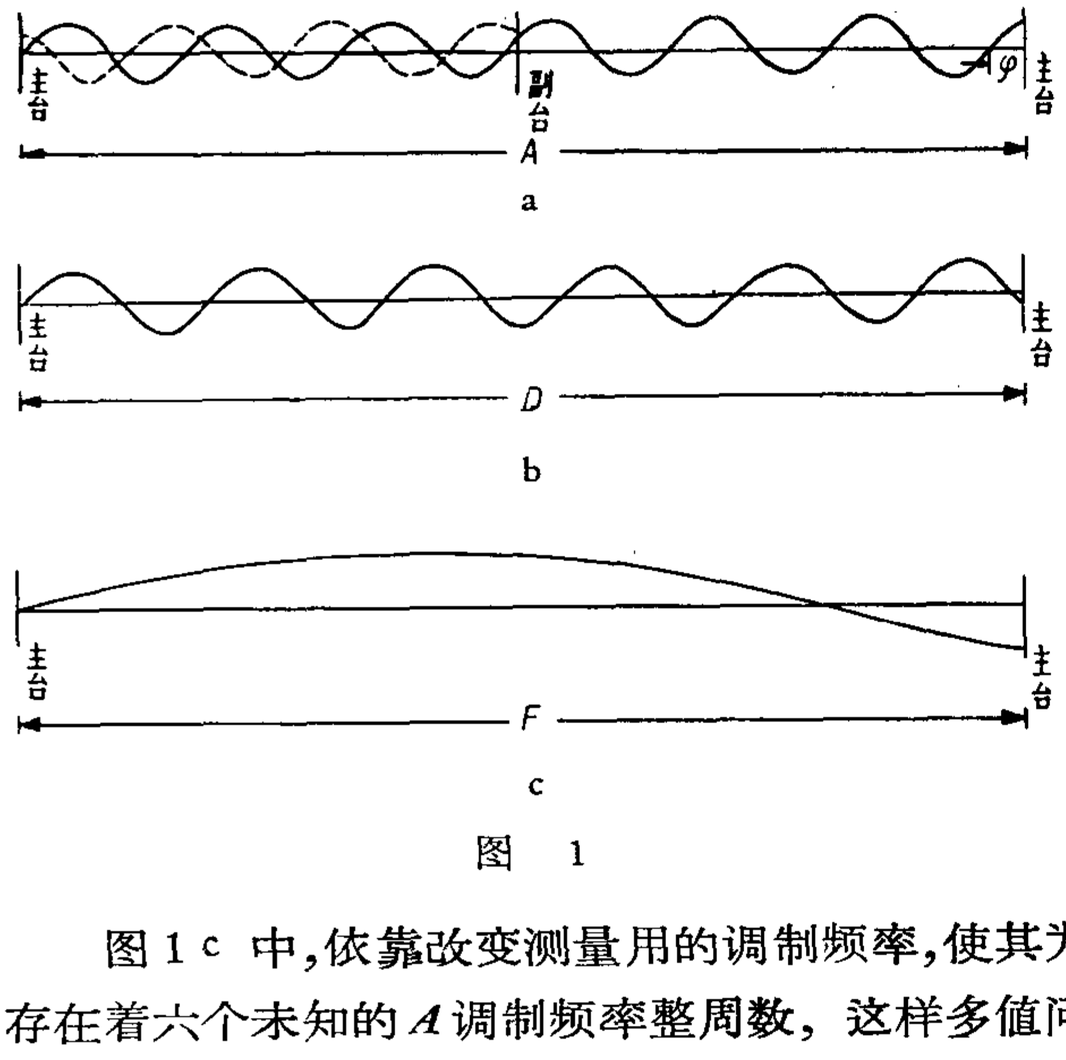


图 1

该图显示了自主台传输至副台后及重被返回(以虚线表示)的正弦电波. 为了方便，返回路程也用连结的实线表示，而主台的输入及输出调制讯号的相对相位，则用相位延迟 A 表示. 借助所发射的调制频率的相位差 A，就能测量电波的双程传输时间. 显然，由于相位差测量只能求得小于 2π 的 φ 值，因此 A 值带有多值性，此处相位的整周数仍然无法知道.

图 1 c 中，依靠改变测量用的调制频率，使其为原频率的 1/10，则相位读数 F 指示了存在着六个未知的 A 调制频率整周数，这样多值问题就可获得解决. 由于电子技术的限制(各调制频率不能相差太大)，因而不能如上所述那样做，而代以基本频率 9/10，99/100 …… 等作为解决多值问题的调制频率. 从图 1 看出，A 和 D(频率为基本频率的 9/10，见图 1 b) 两调制频率的相位差差值在沿着曲线上各点处都等于具有频率为 1/10 电波的相位差 F. 因此，若相继发射 A，D 两频率，并顺次读出它们的相位差，则依靠数学减法可求得 F 值，由此可直接换算成电磁波往返的传输时间 t，代入 $D = \frac{1}{2} vt$ 后，即得距离.

---

1) 其频率约在 3000—30000 兆赫，属微波波段，微波测距仪由此而得名.

微波测距仪的最大特点就是在调制波的传输过程中，由于微波的直线传播及散射性強等特性，就使杂散反射(例如地面反射以及干扰电波)所引起的测距误差比一般无线电测距仪小得多．其次，能以较小的设备设计出方向性较強的輻射天线，从而能在消耗少量电能情况下使量程增加，量测精度提高．但是，这类测距系统终究沒有完全摆脫电磁波在传播过程中的多路接收所带来的测相误差．大家知道，具有一定輻射角度的电磁波，在途中总会同地面或其它反射体接触，而与直接射束一起进入远方接收机，不同路程传播讯号的迭加，常使测距产生误差．有时甚至造成讯号的严重衰減和畸变，而无法施测，因此自第一台微波测距仪投入生产以后，各国测量工作者以及仪器设计师们主要围绕着克服多路接收所引起的误差问题进行了大量的研究工作．同时在进一步发挥微波测距系统的潛力并使之用于其它测量作业方面也作了许多大胆的尝试，并且取得了一些进展．

二

南非[1)]最初制造的仪器其型号为 MRA-1，仪器载波频率的变化范围为 2800—3200 兆赫，相应的波长约为 10 厘米[1]．为了保证具有 3 厘米的测时精度，选用了频率为 10 兆赫的电磁振荡作基本调制波．在解决测距的多值问题时，应用了频率与 10 兆赫差 1/10，1/100 及 1/1000 的讯号，作为相继发射的调制波．计算表明，由这些频率所测得的相位差就能单值地测量 15 公里以內的距离．为了消除仪器內部电路的相延，在副台还增添了一个频率为 10.001 兆赫的调制波．

相位差显示方法的优劣，在很大程度上决定了仪器的量测精度，因此这个问题也就特别重要．MRA-1 型基本上采用直读的电子射线相位计的方法作显示系统．这种相位计的工作原理可用图 2 说明．

直接从主台发射机发射的比较讯号 u_1 经过放大器和移相器后，分别加到阴极射线管两对致偏板上．由于两电压相互间存在着 90° 的相位差，因此，只要施加的电压选择得当，在萤光屏上就会得到圆形扫描迹线．与此同时，在阴极射线管的控制极上输入需与圆形扫描比较相位差的电压 u_2．此电压自副台返回以前，先通过一形成装置，其作用是把输入端的正弦电压变换成尖锐的单向负脉冲．在脉冲持续时间內，由于电子射线束被截止，就使圆形扫描出现一明显的缺口，此缺口的位置视脉冲电压与圆形扫描电压间相位差 φ 的大小而定．根据实验证明，这种指示方法的精度约为 2°．若萤光屏的圆周等分成一百小格，而调制讯号以 10 兆赫计算，则每次读数的精度约为 0.5 毫微秒，相应的距离为 7.5 厘米．

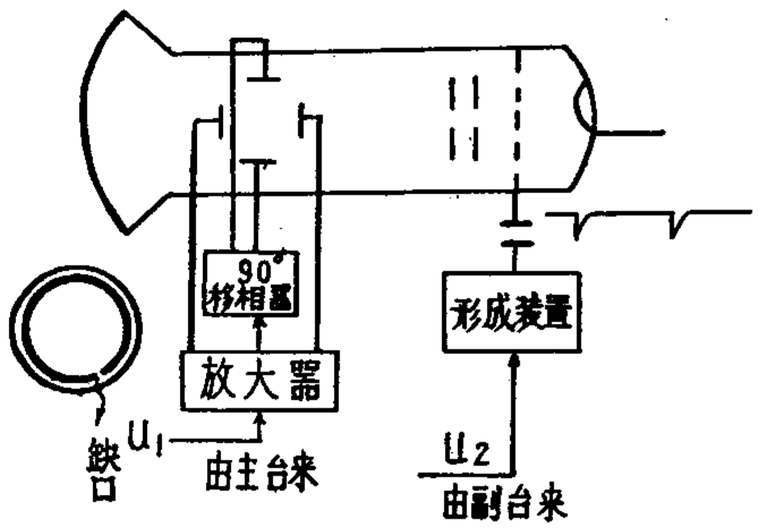


图 2

最初制造的 MRA-1 型仪器，无论就仪器的结构、工作条件和测距精度都能基本上满足了大地测量上的要求．实际野外试验的结果证明：一般情况下仪器的精度与制造厂提出的 ±（5 厘米 + 3 · D · 10^{-6}）的估计公式基本吻合．但还存在着严重的缺点，譬如前

1）南非是在白人种族主义者的统治之下，南非的非洲人民正在为爭取民族解放而斗爭，下同．

面曾提到的多路接收影响尚未彻底解决. 根据理论证明，这种影响所引起的测相误差可用下式表示：

$$\beta = \Sigma \frac{g_{mi} \cos \omega \Delta t_{mi} \sin \Omega \Delta t_{mi}}{1 + \Sigma g_{mi} \cos \omega \Delta t_{mi} \cos \Omega \Delta t_{mi}}, \tag{1}$$

式中 g_{mi} 为地面影响系数，ω 及 Ω 分别表示载波及调制波的角频率，Δt_{mi} 为直接及间接波的行程差.

由公式(1)可知，测相误差与载波频率间存在着周期关系. 因此，只要取一连串不同载波频率位置的测相结果加以平均，就能在相当大的程度上消除它的影响. 可是由于变频范围的限制、多路接收的复杂性，误差常不能满意地消除，特别在地形变化复杂的地区，这种影响有时能使讯号強烈失眞和衰落，甚至无法进行测量.

其次，在仪器的适用范围和操作的灵活性方面，也同样存在一些缺陷.

为了使仪器便于在不同地区作业，继 MRA-1 型仪器后，又有 MRA-1 Cw 型仪器投入生产. Cw (Cold Weather) 原为冷天气之意，即仪器除能在一般地区作业外，还可应用于寒冷地区(作业温度 −40°—+40℃ 而 MRA-1 型为 0—+40℃). 与 MRA-1 型相比，两者的区别在于：前者的石英晶体具有恆温设备. 因此，只要根据指示灯确定仪器达到晶体工作温度(+50℃)后，就可开始作业. 由于加设了恆温控制，我们有可能使石英晶体的频率变化限制在一个很小的范围內，测量时就不需要读晶体温度，同时在內业处理时也就不再需要进行频率改正了.

随着微波测距技术的迅速发展，作业人员对原有设计又提出了新的要求和改进意见，很快地一种新型的测距仪器 MRA-2 诞生了. 这种仪器的主要特点是主、副台已合而为一，只要变换一下旋钮，每台仪器可兼作主、副台. 同时，在仪器的外型结构上也重新进行了设计，在不改变仪器輻射角情况下，以瓦形反射体代替抛物面反射体；并使仪器可不另行装箱，只要在面板上加上套盖，就能携带和运输. 在电源设备方面，取消了原先的振动子电源变换箱而代以安于仪器机身內的晶体管升压装置. 由于应用了头戴听筒，使测量工作方便得多. 这些改进使仪器的总重量減轻了 20%.

主、副台的合一，使三边测量和导线测量的速度有了显著提高，同时为对向观测创造了极为有利的条件.

MRA-2 型仪器比起早先使用的仪器尽管有了一定程度的改进，但是大体上还是保持最初设计时的雏型，在测距结果中仍然沒有彻底消除以上所述的多路接收等影响所带来的测距误差. 为此，1960 年有关制造厂又设计和制造了 MRA-3 型微波测距仪[2]. 新仪器就结构和测距精度的可靠方面都较前者为优.

首先，MRA-3 型仪器在载波波长方面以 3 厘米取代了 10 厘米，在抛物面的截面相同情况下，前者的方向性要比后者強得多. 根据计算，新型仪器的輻射角约为 6°. 正由于这个优点，因此多路接收的可能性也比以前所使用的仪器为小(輻射角小了 3 倍)，特别是用 10 厘米波长无法测量的测线，用新型仪器常能获得成功的结果. 可以说，在克服多路接收影响上新仪器确实前进了一大步. 在显示系统上，MRA-3 型仪器也作了一些改进，据制造厂的最新报导，仪器的显示方式分为两种，一种是用示波管上的直线扫描线进行读数，而另一种是借助于指零电表以及移相器直接以数字指示. 在读数精度上，以上两

种方法比以前都有了提高.

示波管的直线扫描读数与圆扫描缺口读数的区别，在于由副台来的比较讯号在副台并没有预先通过形成电路变为脉冲，而仍然以正弦形式被输送至主台的显示单元. 在显示单元中,两比较讯号通过有关的电路使两者的电压相等,然后使其合成.由图 3 看出,两幅度相等的电压,它的矢量和与矢量差一定相互垂直,利用移相器把其中一个合成电压延迟 90°，这时电压 E_c 和 E_p 在相位上是同相或反相. 如果此时把电压 E_c 加在示波管的水平偏转板上,而把 E_p 加在垂直偏转板上,那末萤光屏的扫描迹线就会呈显一条直线,此直线与水平轴所成的倾斜角(当两对偏转板的灵敏度相同时)将等于 $\varphi/2$, φ 值即为两比较讯号间的相位差. 只要移动一旋转指针使与扫描直线平行，然后在萤光屏的圆周尺上直接读取相位差值. 这种读数方法的单位与以前使用的仪器一样,以毫微秒表示.

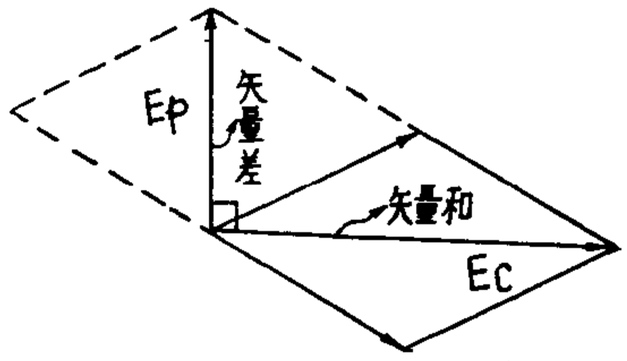


图 3

直接以距离表示的显示方式是利用了所谓补偿法测量相位移的原理. 与直线扫描读数法一样，运用这个方法读数时，假定由副台返回的比较讯号也呈现正弦形式而不是脉冲. 只要把需要测出其间相位差的讯号中的一个 u_1 加在一校准好的移相器上,利用此移相器使讯号 u_1 的相位调节成和另一个比较讯号反相(即移相180°−φ,见图 4),在通过一定的电路使两者的振幅相等后,送入电流计中进行比较，可知当两者的相位反相时，电流计的指针应在零位. 否则应调节移相器使其指零. 只要适当地选择石英晶体的频率以及平均的大气折射率(高精度作业中,仍可根据气象资料加以改正),就有可能直接以长度作为单位在校正过的移相器上进行刻度.

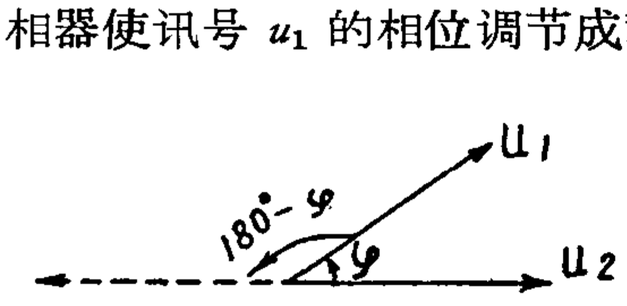


图 4

这两种新的读数方法在精度上都有了提高(具有约 1° 的测相精度),特别是距离读数法,它取消了计算工作,使整个测量作业变得简单,而且产生人差的可能性也大大减少.

新仪器由于采用了以上这些改进措施,使测距精度从原来的 ± (5 厘米 $+3\cdot D\cdot 10^{-6}$) 提高至 ± (3.8 厘米 $+ 3\cdot D\cdot 10^{-6}$). 在仪器的内部结构方面，由于采用了晶体管化、插件化、以及印刷电路等新技术,结果使重量大为减轻,维修变得容易.

到目前为止,除南非仪器公司所生产的以上三种不同型号的仪器外,其它各国近几年来在微波测距仪器的制造方面也投入了相应的力量,并取得了很大的成绩.

早在 1959 年，南非的仪器还刚问世不久，美国 Cubic 公司试制成功了 DM-20 电子尺[3,5]. 这种仪器的原理基本上与南非制造的相同. 在结构上与 MRA-3 型仪器相差无几. 仪器的载波波长也约为 3 厘米(频率范围为 10000—10500 兆赫),主台石英晶体的基本频率为 7.5 兆赫，相位差测量采用了电流计的指零方法，并直接以长度表示(平均折射率采用 1.000320). 由于仪器中增加了一个 E 晶体,因而使测量的单值范围扩展至 100 公里. 现将 DM-20 电子尺中各石英晶体的频率以及在读数盘上相应的距离列如表 1.

由表 1 看出,仪器的单次读数精度已被提高至 1 厘米的量值,因而使仪器的设计精度成为 ± (1 厘米 $+3\cdot D\cdot 10^{-6}$). 据西德汉诺威高等工业学校大地测量研究所在 1962 年的

表 1

测量通道	比例尺	读数精度	比例尺相应频率	调制频率 (MC)	
				主台	副台
1	10 米	1 厘米	15 MC	7.5000	7.5015
2	10 米	1 厘米	15 MC	7.5000	7.4985
3	100 米	10 厘米	1.5MC	6.0000	6.0015
4	1 千米	1 米	150 KC	7.3500	7.3515
5	10 千米	10 米	15 KC	7.4850	7.4865
6	100 千米	100 米	1.5KC	7.4985	7.5000

野外试验证明：在边长大于 20 公里的测线上，用 DM-20 测距仪测得的结果与根据 1920 年所测的一等三角座标算得的距离比较，差值约为 2.4 毫米/公里，其相对误差为 1:385000；上列数据按公式表示的话，即 $ds = \pm$（3 毫米 $+2.5 \cdot D$ 公里 $\cdot 10^{-6}$ 毫米）. 但是 DM-20 电子尺和南非的微波仪一样,在与 1958 年所测的三角测量资料比较时发现,在距离大于 15 公里的测线上差值达到了 1 厘米/公里,并明显地带有系统性(两种测距仪所测结果都较用经典几何方法测得的为大),而对于小于 10 公里的测线(基线网内各边),精度却为 1:500000，而且沒有系统现象发生. 关于这两者的差异 Kneiβl 教授在 1962 年重新平差欧洲大地三角网的学术讨论会上曾有提及. 对此还必须作进一步的试验，以证实系统性是否发生在 1958 年观测的经典三角测量上. 在短边上（1—3 公里)的试验表明：DM-20 电子尺的测距结果与由 IV 等三角点座标算得的距离以及 NASM-4 型光速测距仪的成果比较,其平均相对误差,前者为 1:70000，后者为 1:125000.

在仪器的电子线路结构上，DM-20 电子尺与常规的微波测距仪也有一些区别，它选用了 46.5 兆赫作外差后的中频,采用 1.5 千赫为相位比较讯号的频率,特别由于舍弃了圆扫描缺口读数方法,因而副台差频后的比较讯号沒有经过脉冲形成装置,而只是增加一双调频通道，即 1.5 千赫的比较讯号先以调频形式调制在 70 千赫的过渡频率上，然后输入速调管对高频振荡再进行一次频率调制,最后被发射回主台. 为了在测量时使主、副台速调管的振荡频率差值(中频)不因外界条件的影响而变化，在副台还增添了自动频率控制单元.

与此同时,匈牙利、波兰、民主德国、瑞士、苏联、西德、捷克斯洛伐克、法国等国家在熟悉和了解南非微波测距仪各种性能的基础上,也先后开始了这类仪器的试制工作.

1961 年匈牙利布达佩斯精密仪器制造厂试制成功了 GET-B1 型微波测距仪. 从仪器的主要技术数据看来，与南非的 MRA-1Cw 型仪器相同. 在长度为 3.3, 6.9, 15.8, 43.3 和 69 公里的各条测线上用 GET-B1 型仪器施测结果的相对精度各为 1:85000, 1:116000, 1:80000, 1:941000, 1:380000, 基本上符合 $\pm$(5 厘米 $+3 \cdot D \cdot 10^{-6}$) 的估算公式. 目前仪器已成批生产.

波兰华沙工学院超短波技术实验室于 1961 年也试制成功了 KG-60 型微波测距仪，仪器的载波波长为 3 厘米,中频选为 36 兆赫，石英晶体的基本频率为 15 兆赫，而低频比较讯号的频率使用了 1.5 千赫,在显示系统方面仍然采用脉冲形式的圆扫描缺口读数. 但为了提高测定相位差的精度，在副台的 1.5 千赫比较讯号先经过倍频成 3 千赫,再转换成

脉冲而返回主台，以改善缺口的清晰度，从而提高读数精度。仪器的作用距离为 100—3000 米，因此，只要附加与基本频率差 1/10及1/100 的两个辅助频率，就能解决测距的单值性。同时，这种仪器的发射和接收偶极子都采用了垂直极化，这样就使多路接收的影响减弱到最低程度。1962 年原试制单位在 KG-60 型仪器的基础上，又发展和设计出 KG-S-P005 型电子测距仪器，新仪器的技术数据与 KG-60 基本相同，仅比较讯号的频率已改为 2 千赫，同时仪器的作用距离扩展至 5000 米，仪器的设计精度为 ±（5 厘米 +3 · D · 10^{-6}）。但根据 1962 年在长为 500—2500 米（共 8 条边）的测线上进行的野外试验结果，仪器的实际精度达到了 1/20000—1/100000。由此看来，只要有可能使精度稳定在这个范围，这种仪器在工程测量上就有无限广阔的发展前景。

由瑞士 Wild（Heerbrugg）和 Albiswerk Zürich 厂于 1962 年试制成功的 Wild DI-50 测距仪[4]，最近已投入成批生产，从报导的资料看来，这种仪器约与 MRA-3 型微波仪相当。但为了便于直接以长度表示测距结果，石英晶体的基本频率选用了 14.984830 兆赫，其它几个辅助频率各为 14.977344，14.834980 和 13.486350 兆赫。仪器的量测范围为 100 米—50 公里，精度视气象测定情况变化在 ±（2 厘米 +D · 10^{-5}—D · 10^{-6}）范围内。石英晶体恆温系统的精度为 ± 0.5℃，因此具有 0.2 · 10^{-6} 的频率稳定度。DI-50 仪器的最大特点是仪器的发射单元已与主机分离，抛物面天线可象望远镜一样绕着支架作垂直及倾斜旋转，而仪器的零点就置于倾斜旋转轴上。在抛物面支架上方还设有照准花杆，下部可安于 Wild T_2，T_{16} 及 T_3 等基座上作強制归心，以便于作导线测量。仪器的本机与发射单元间有一 15 米的电缆连接，对于地面通视困难及多路接收影响強烈的地区或测线，这样做无疑会带来方便，因为可以利用一些简单的附属设备任意升降发射单元，从而能有利地选择测站高度。其次，在显示系统方面，也使用了较为先进的方法，即每次测距结果可利用计数器直接以七位数字（至厘米）表示于仪器上，不再需要利用算术运算来得到距离。若要求更高的测距精度，则只要在测量的同时记下气象数据，在读得的距离上加上由算表查得的气象改正就行了。这种读数方法对于军事测量的意义更为巨大。

从已有的实验资料看出，在小于 250 米的距离上，DI-50 型仪器与精密带尺丈量结果的平均差值为 5.4 厘米。基本上与南非仪器相当。

民主德国 Köpenick 无线电工厂目前也正在试制仿 MRA-3 型的微波测距仪，其型号为 PEM-1。这种仪器的载波波长虽为 3 厘米，但輻射角约为 5°。主台仍然利用阴极射线管的圆扫描缺口读数，但示波管的直径增大为 7 厘米，借以提高读数精度，其设计精度也为 ±（5 厘米 + 3 · D · 10^{-6}）。

自 1959 年以来，苏联也开始了试制适用于大地测量作业的微波测距仪。据报导，已于 1961 年完成了实验室安装和调整工作，并开始进行野外实验。这种定名为 BP-Д 的无线电测距仪在一条长 22.5 公里的边上，与光速测距仪进行比较测量，结果相差达 15 厘米。

根据现有的资料，西德、法国、捷克斯洛伐克等国家所试制的微波测距的原理、结构以及性能基本上都与南非 MRA-3 型相仿，这里不再赘述。

表 2 列出了各类微波测距仪的性能概况，以资参考。

表2 微 波 测 距 仪 一 览 表

型 号	制造者	载波波长(厘米)	精 度	作用距离	显示系统	重量(公斤)	消耗功率(瓦特)	备 注
MRA-1	南 非	10	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管	11	45	无恒温,重量仅为仪器本身
MRA-1Cw	南 非	10	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管	11	50	有恒温,重量仅为仪器本身
MRA-2	南 非	10	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管	14	50	有恒温,重量仅为仪器本身
MRA-3	南 非	3	$\pm(3.8\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管或指零表	16	50	有恒温,包括电池组
DM-20	美 国	3	$\pm(1\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—100公里	指零表	11.5	40	有恒温,未包括电池组
GET-B1	匈牙利	10	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管	15	50	有恒温,未包括电池组
KG-60	波 兰	3	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	100米—3000米	示波管	15	—	有恒温,未包括电池组
KG-S-P005	波 兰	3	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	100米—5000米	示波管	15	—	有恒温,未包括电池组
Wild DI-50	瑞 士	3	$\pm(2\text{厘米}+D\cdot 10^{-5}—10^{-6})$	100米—50公里	指零表利用计数器以距离表示	22.5	—	有恒温,包括发射系统与主机
PEM-1	民主德国	3	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	200米—30公里	示波管	15	35	有恒温,包括电池组
ВРД	苏 联	10	$\pm(5\text{厘米}+3\cdot D\cdot 10^{-6})$	150米—60公里	示波管	45—50	50—60	有恒温,包括蓄电池及其它辅助设备
Distameter	西 德	3	$\pm(2\text{厘米}+D\cdot 10^{-5}—10^{-6})$	50米—50公里	指零表直接用距离表示	10	36	有恒温,未包括电池组

二

南非制造的微波测距仪最初仅服务于大地测量部门，虽然此类仪器在精度上还略逊于大型光速测距仪，但因其测量方法简便，作业迅速等特点，仍然不失为精密导线和三边测量的有利工具。自1958年以来，美国、加拿大、澳大利亚等国家共利用数百套各种型号的微波测距仪布设了约40000多公里的导线网及三边网。测量中普遍认为只要采取相应措施，避免强烈的多路接收影响，仪器的真实精度可达到1/150000—1/200000。这个数值基本上已满足了一等精密导线测量的要求。

正当微波测距仪在大地测量上初露锋芒的时候，南非海军水道测量部门根据自己工作的特点，利用了微波测距仪的测距原理设计和制造了水上微波测距仪MRB2 (Hydrodist)[6,7]。这种仪器与陆上测距仪的主要区别在于：作为调制用的基本石英晶体频率由10兆赫降低为1.498470兆赫，因而示波管整个圆周所代表的距离为100米，实际的读数精度也因之降为0.5米，这是由于船舶的移动所决定，更高的精度在此处也失却其意义，相反地反而使读数增加困难。

为了确定船舶的位置，必须同时测定由船舶至两地面固定站之间的距离，利用交会方法，定出移动台所处的大地位置（见图5）。因此船上至少设有两个主台，为了防止干扰，彼此的工作频率需相隔80兆赫，其中每个主台各与陆上已知点上

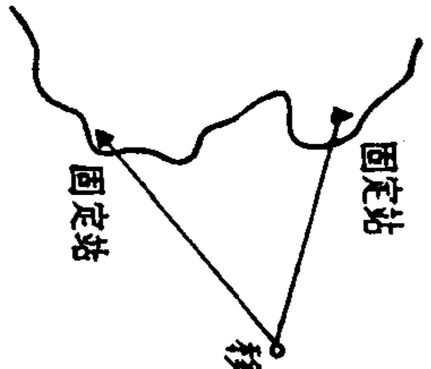


图 5

相应的副台建立联系．为了增大仪器的有效量程，主、副台的发射单元都可与主机分离，并借助辅助设备使其升高．仪器的作用距离可达 40 公里．当航速小于 10 米/秒时，在船上的仪器读数方法仍可如陆上测距仪一样，由作业员进行人工操作及记录．当航速大于此值时，必须采用自动的观测方法，这时副台可按主台的意图顺次变换调制频率．

由于采用了平均折射率（$n = 1.000325$），读数是以距离直接表示，一般情况下由此所产生的误差不大于 $D \cdot 10^{-5}$，在极端情况下可能到 $3 \cdot D \cdot 10^{-5}$．实际试验的结果证明，利用 MRB2 型水道测距仪的距离测量精度约为 1.5 米．当然，船舶的定位精度还与交角的大小以及船位的平稳程度有关．

水上微波测距仪可为海上及港湾的各种工程设计提供精密的连续定位资料，同时在海面油田勘测及近海岛屿连测工作上，它无疑的也是一种极为有利的测量仪器．特别是在海上的恶劣气候条件和必须在晚上进行作业的情况下，这种仪器更显示出它的优点．

一般说来，由于受到地面视线的限制，微波测距仪的作用距离无法扩展．因此，很自然地会想到如将仪器置于飞机之上，则可从空中至地面台所量测的一系列距离中，确定两远离数百公里的地面台间的距离或飞机的空间位置．这种想法已在 1959 年被美军工程研究发展实验室所实现．这种仪器定名为 Aerodist MRC-1 型[6,7]的空中微波测距仪，具有 1200—1400 兆赫（约 25 厘米）的载波带宽，同时副台（地面台）反射器孔径的尺寸和发射机的功率、接收机的灵敏度比常规微波测距仪都有了增大和提高．这些变更主要是为了增加量程，从而扩展仪器的作用范围．但是空中台天线的方向增益量，由于其形状受到飞行时空气动力的影响，和为了避免测量时连续的调整方向，而有了一定的减小．天线的每组偶极子可以旋转，以致飞机作反向飞行时，还能以原天线组针对原地面台．

与水上微波测距仪一样，主台的 A 晶体频率取为 1.49847 兆赫，直接以长度作为相位差读数（平均折射率 $n = 1.000325$），并在多通道的带状记录器上显示．依靠显示单元中的一个自动分析器，可解决测距的多值问题．地面台天线具有很高的增益（方向窄），因此地面台作业员应随时注意和调整它的辐射方向．这种仪器的精度估计为 $\pm$（1 米 $+ D \cdot 10^{-5}$），式中 1 米的误差主要来自标尺的分辨能力和飞机的相对运动，因此短距测量中仪器误差起了决定作用，而对于长边来说，这项误差就具有较小的意义．仪器的总误差基本上仅与气象条件有关，即在良好的测量条件下，空中测距的总误差有可能小于 $1 \cdot 10^{-5}$．

利用空中微波测距仪可以解决测量上一系列的问题．例如：可利用众所周知的 Shoren 方法以测定飞机在穿过测线时至两地面点之间的距离，并由相对高程依几何关系化算至两地面点间的大地距离（这样的距离可允许测量至 320 公里）．当然也可以反过来利用两个已知的地面点及所测定的至空中台的距离和航高（一般用气压高程）来推算飞机在某一瞬间的位置（作用距离达 160 公里）．另外也可用三边测量的方法从已知点推求未知点座标．但是气压高程测量常不能满足上述测量作业中的精度要求，譬如在摄影测量中确定航摄机的空间位置时，要求航高的精度较高，对测区小而测图比例尺较大的地区，这时可利用三个地面台，其中两个用来确定航摄机参考点的平面位置，而另一个副台则利用它近似设置在飞机垂直下方的条件，用来在飞行过程中测定飞机的航高．为了提高精度，这一对仪器的调制频率也可提高至与常规的微波测距仪一样．在测区较大的情况下，可多布设几个测定航高的地面台，根据飞行条件以最适当的地面台来测定高程．这种方法有

可能使精度保持在分米的量级. 除此以外，空中微波测距仪由于具有能连续定出飞机位置的特点，因此还有可能使飞机在航摄时保持在计划的航线上.

1962 年加拿大已经开始利用这种仪器进行大地网的扩展和加密的试验，无论就精度和测量的组织工作来看新的空中测距系统完全有可能代替已有的 Shoran 和 Hiran 方法.

在工程测量方面，微波测距仪也有它广阔的发展前景. 据有关文献报导，美国在公路、铁路、高压输电线以及敷设输油管等线路测量中，广泛地使用了微波导线测量，而且获得了满意的结果. 西德测量研究所用 DM-20 电子尺对边长小于 10 公里的测线所得的野外试验结果表明，只要合理的选择测线以及在测量时采取适当的措施，微波测距完全有可能使用在精密的工程控制网中. 特别是交通困难的工程地区，利用微波测距仪作业具有一定的经济意义. 在地形测量中有可能利用微波测距仪布设小型的测边三角锁及支导线，以便迅速地建立图根控制点，同时也可利用支导线上的转折点，进行距离的前方交会，额外地获得地形测图的补点. 美国地质测量局曾用微波测距进行成图的野外检查，取得很大成功. 其方法是从几个通视良好的控制点上，用极座标法检查碎部点的水平和垂直位置的精度，因为它的有效距离大，所以特别适宜.

有关军事测量部门对微波测距仪的性能也早有研究. 早在南非最初的仪器发明不久，就有大地定位仪 (Terrafix 系统)产生. 这种定位系统系利用微波测距原理制成，全套设备包括三个发射台及一定数量的接收台，后者由于轻便可由单人携带. 利用距离的交会方法，可迅速而又精密地测定各接收台的平面位置. 其定位精度视基线和交会距离的长短而定，当基线为 16 公里而交会距离为 20 公里时，定位精度约为 ±3 米.

四

近几年来，世界各国的有关测量业务机关及研究部门在提高微波测距仪的精度以及进一步发挥它的潜力方面进行了不懈的努力.

加拿大国家研究委员会物理实验室在 1958 年试验利用微波测距仪在森林地区避免建造高标的测量方法已获得成功. 为此，将仪器的发射单元与主机分开，中间用电缆或波导杆连接，借助升降装置及拉线设备能在 20—30 分钟内将发射单元升高至 15 米的高度. 这种设备除了能解决困难地区的造标问题外，还能在多路接收强烈地区合理地选择测站高度，从而有效地削弱它的影响. 美国南极考察团也曾利用了这种技术进行南极冰上地区的测量工作，它采用每根 2 米长的铝管作为支持天线抛物面的桅杆.

通过几年来的野外实践，也初步探索出一套较为完整的野外工作方法，其中包括测线的选择、仪器零点差的测定、测量时遇到强烈多路接收时所采取的相应措施以及野外成果的处理等方法，这些方法一般确能提高测距的精度. 例如英国的 Kelsey[8] 所介绍的降低仪器高法，美国 Laurila[9] 所提出的用橡胶板将反射波吸收的方法以及我国最近曾进行过试验的屏蔽法[10]等，都不失为良好的削弱地面反射的作业方法. 在零点差测定方法的研究方面，继丹麦皇家大地测量研究所后，我国有关单位也曾对它进行了大量的实验，证明了与 A 晶体读数间存在着正弦曲线的变化规律. 特别是在采用了升降测站高度以获得完整的地面偏差曲线周期后，由于很大程度上摆脱了地面反射的影响，因而能使零点差的结果更好地符合客观实际，从而提高量距精度. 在外业计算工作和成果的内业处

理方面，也同样取得了一些重要的经验，诸如在根据气象资料计算电波折射率时，为了满足精度要求，过去采用数表法直接用计算机计算，速度较慢．目前采用图解方法[11]，只要以干温 t 和干湿温差 Δt 作引数，直接由诺模图中查得主项和改正项，通过简单运算，即可获得与用数表法精度相当的折射率值；又如这几年在野外资料大量积累的前提下，有可能从统计观点出发，提出较为符合实际的微波测距边的精度估算公式[12]：

$$M_D = \sqrt{\left(\frac{m_c^2}{C^2} + \frac{m_{n'}^2}{p \cdot q \cdot n^2} + \frac{m_{代}^2}{p \cdot n^2}\right)D^2 + \frac{m_{iD}^2}{p \cdot q} + m_{\triangle}^2}, \qquad (2)$$

式中 p 为测量时间段数，q 为每时间段测回数，n 为测回数，m_c 为真空中电波传播速度误差，$m_{n'}$ 为折射率读定误差，$m_{代}$ 为气象代表性误差，m_{iD} 为测相误差，$m_{\triangle}$ 为零点改正误差．

上式只估计了微波测距误差的偶然部分，而对地面反射和气象情况所引起的测距系统误差没有估计在内，因此，公式带有一定的局限性．但在当前尚未见到其它估算方法前，该式仍然具有实用意义．

随着测绘工作者对电子测距的精度要求日益提高，最近在气象误差的研究方面已引起了国内外广泛的注意．大家知道，电磁波的传播速度与测线路径上的气象情况有着密切的关系．但是在一般的电子测距作业中，常以测线两端的气象值的平均作为全线的代表值．当测线的地形起伏较大及地表覆盖多样的情况下，这样处理常导致测距结果产生很大误差．据 Vienna 对此问题研究证明，假如沿传播路径不附加可靠的气象数据，那末对于微波测距常会产生 ± 8 毫米/公里的误差．因此有些国家的微波测距作业细则中除规定每条边至少应在两个不同日期观测以减少气象代表性误差外，还提出在可能条件下应在测线中间加设气象站，或根据地形起伏及植被等情况进行附加的气象改正，借以提高精度．与此同时，气象仪器的量测精度也有待进一步提高．常可发现在某一时间段内各测回所得结果的差异与气象变化不相适应．一般情况下，气象变化的反映比较迟钝，而电波传播时间的变更则很灵敏．其中除与仪器本身的稳定情况及测线中间复杂的大气扰动有关外，还由于气象仪器的测定精度目前尚存在一定的局限所致．除此以外，尚发现在不同气象条件下所测得的结果彼此往往相差较大．这说明目前所使用的 Essen 和 Froome 计算公式也不能认为已相当完善，看来尚有改进的必要．

同样地，微波测距仪石英晶体振荡器的野外检校问题过去没有引起足够的重视，特别对于具有恆温装置的测距仪器更是很少注意．据加拿大测量部门研究，由于微调电容器的电容变化（极片间的湿气及震动等影响）常使频率变化达几十赫．为此，西德理论大地测量研究所与有关单位研究和试制成功“ERICA”、“ERICH”两种频率检定仪，前者适用于 MRA-1(2) 型微波测距仪中 9 及 10 兆赫的检校，后者则可用于水道及空中微波仪中 1.4985 及 1.4975 兆赫的频率校准．其原理系利用恆温精度较高的石英晶体振荡器的标频与要校的频率进行混频，而得到的差频经低频放大后，可用耳机直接听取并进行校准．根据实验结果知道，这种检频仪的精度为 ±5 赫，工作状态很稳定，使用也较简单．

还应当提到美国航空公司和西德应用测量研究所利用常规微波测距仪在海上进行的一些试验情况．根据直观的感觉，预计海上水面反射的強烈现象会使所得结果包含很大误差；但实际测量的结果证明，对于 25 公里以上的长边，所获得的测距精度，可与一等三角测量相当．特别引起注意的是：当测线条件处于光学通视范围以外的情况下（割线在

水平面下最大达 30 米)仍然获得了满意的测量结果.

綜上所述,目前微波测距仪就其精度来说,已能基本满足测量上各种不同的需要. 但由于影响仪器精度的一些致命弱点(如地面反射、气象影响等)还沒有得到完全的改善,有时候对个别测线的成果还存在着揣测和怀疑. 诚然,在探索克服这些障碍的道路上,也曾进行过广泛的研究,但从发展着的各类物理测距仪器的性能中可看出,提高仪器的载波频率和调制频率仍然是一个较为有效的方法.

最近几年,国内外的光速测距技术也有飞跃地发展,无论在減轻仪器重量,并使之用于白天工作以及提高测距精度等方面,都取得了一些进展. 同时,在利用近代最新物理成就试制新型测距仪器方面,也获得了重大的成就. 最近, Froome 等人所制造的 Mecometer (微波光电测距仪), 为微波和光波的结合开拓了新的途径. 在以光受激发射原理的基础上发展起来的 Laser 测距仪,将为物理测距仪器的发展开辟一条崭新的道路. 可以預言,随着现代科学技术的不断发展,现有的微波测距仪必将彻底地得到改进,只要技术问题一旦解决,一种新型的綜合光电和微波测距仪各项优点的距离丈量工具定会公诸于世.

参 考 文 献

[1] Wadley, T. L., Electronic Principles of the Tellurometer, *The Transactions of the South African Institute of Electrical Engineers*, May, 1958.

[2] Bill, R., The First Tellurometer Symposium, *Survey Review*, January, 1963.

[3] Schendel, A. H., Das Elektronische Präzisions-Entfernungs-messgerät "Electrotape" Modell DM-20, *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, März, 1963.

[4] Wild DI-50 "Distomat", *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, März, 1963.

[5] Seeger, H., Erste Erfahrungen mit dem Electrotape DM-20, *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, August, 1963.

[6] Smith, R. D., The "Tellurometer" System New Applications to Geodesy and Hydrography, *Journal of Geophysical Research*, February, 1960.

[7] Höpcke, W., Zur Heutigen Stand der Elektronischens Strecken-messungen, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Oktober, 1959.

[8] Kelsey, J., A Method for Reducing Ground Swing on Tellurometer Measurements, *Empire Survey Review*, No. 112, 1959.

[9] Laurila S. H., Accuracy of Tellurometer over Short Distances, *Journal of the Surveying and Mapping Division*, vol. 89, No. SU3.

[10] 夏治中、赖锡安,微波测距中的地面反射问题,测绘学报,第七卷,第三期,1964.

[11] 梁增勇、戚金成,关于微波测距折射率的计算问题,测绘通报,9 卷 1 期,1965.

[12] 梁增勇等,微波测距仪测边精度的估计,测绘学报,第八卷,第一期,1965.

更 正

本刊第一号"光激射器及其在测量上的应用前景"一文中有以下错误,特此更正。

页	行	误	正
97	7	光激射又叫……	光激射器又叫……
97	倒 2	对于亚稳级的大批粒子……	处于亚稳级的大批粒子……
99	倒 14	它们所需的光泵功率比之能级……	它们所需的光泵功率比三能级……
99	倒 13	……输出功率已达四瓦	……输出功率已达 9 瓦
99	倒 12	而最小的能级光激射器,	而最小的三能级光激射器,
111	倒 4	……可以忽略的程度[7]	……可以忽略的程度[6]